F. Vega Sánchez - J.J. Saameño Rodríguez
J.M. Salcedo Carretero - C. Miranda Ferrol

Ejercicios de Cálculo

EDITORIAL LIBRERÍA ÁGORA, S.A.
MÁLAGA

F. Vega Sánchez - J.J. Saameño Rodríguez
J.M. Salcedo Carretero - C. Miranda Ferrol

Ejercicios de Cálculo

EDITORIAL LIBRERÍA ÁGORA, S.A.
MÁLAGA, 1987

LIBRERÍA ÁGORA, S.A. 1987
Carretería, 92; Tlf.: 22 86 99
29008-MÁLAGA
I.S.B.N.: 84-85698-32-0
Depósito Legal: MA-1367-1987

Imprime: T. Gráficos ARTE, S.A.
Camino de la Torrecilla, s/n.
MARACENA (Granada)

INTRODUCCION:

Frecuentemente, nuestros alumnos nos demandan problemas resueltos de la asignatura de Cálculo. No es facil encontrar un texto donde se desarrolle por completo esta asignatura de las Escuelas Universitarias Politécnicas; es por esto, por lo que nos hemos sentido en la obligación de redactar el presente libro.

Hemos creido conveniente, en cada lección, exponer un resumen de las principales cuestiones que se utilizan para poder realizar los ejercicios. Asimismo, después se proponen otros problemas con la solución para que el lector pueda comprobar si ha entendido el tema.

Las lecciones que se tratan aquí, se corresponden con el temario impartido en la Escuela Universitaria Politécnica de Málaga, y muchos de los ejercicios son los que habitualmente se hacen en clase o se han propuesto en exámenes.

Esperamos que, el libro, sirva a nuestros alumnos para una mejor comprensión de la disciplina de Cálculo. De otra parte, deseamos recibir sugerencias que nos puedan servir para mejorarlo en futuras ediciones.

Los autores.

NOTA A LA SEGUNDA EDICION:

Queremos agradecer a nuestros alumnos en general y a nuestra compañera, la profesora Dª María del Rosario Muñoz Marin, la ayuda prestada en las correcciones de este manual. Nos gustaría, asimismo, rogar que tal colaboración siga existiendo.

Los autores.

LECCION 1.-

NOCIONES DE TOPOLOGIA DE R.

RESUMEN:

Intervalo abierto de extremos "a" y "b" con $a < b$, es el conjunto:

$$(a,b) = \{x \in R;\ a < x < b\}$$

Intervalo cerrado de extremos "a" y "b" con $a < b$ es el conjunto:

$$[a\ ,b] = \{x \in R\ ;\ a \leq x \leq b\}$$

Intervalo semiabierto por la izquierda es: $(a,\ b] = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$

Entorno de centro x_0 y radio ε es el intervalo

$$(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) = V_\varepsilon(x_0)$$

Entorno reducido de centro x_0 y radio ε es:

$$V^*_\varepsilon(x_0) = V_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}.$$

Sea $A \subset R$, diremos que A es abierto si $A = \phi$ o bien para todo $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in V_\varepsilon(x) \subset A$.

Un punto $x \in A$ se dice interior a A y se escribe $x \in \overset{\circ}{A}$ si existe un entorno:

$$V_\varepsilon(x) \text{ tal que } x \in V_\varepsilon(x) \subset A.$$

Proposición 1.- A es abierto si y solo si todos sus puntos son interiores. Se llama interior de A y se escribe:

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A \ /\ x \text{ es interior a } A.\}$$

La proposición anterior es equivalente a : A es abierto si y solo si

$$\overset{\circ}{A} = A.$$

$A \subset R$ se dice que es cerrado si CA es abierto.

Proposición 2.- Si A es abierto $\Rightarrow$ CA es cerrado. Sea $x \in R$ se dice que x es adherente a un conjunto A si para todo entorno de x,

$$V_\varepsilon(x), \text{ se verifica que } V_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$$

Sea $x \in R$ y x adherente a A, si existe algun entorno de x tal que:

$$V_\varepsilon(x) \quad A = \{x\}.$$

se dice que x es un punto aislado de A, en caso contrario se dice que x es un punto de acumulación.

Se denomina adherencia de A y se representa $\bar{A} = \{x \in R/\ x$ es adherente a $A\}$. Se llama derivado de A y se representa $A' = \{x \in R /$ x es punto de acumulación de $A\}$.

Proposición 3.- A es cerrado si, y solo si, $\bar{A} = A$. Un conjunto A se dice acotado si existen $a,b \in R$ tales que $A \subset [a,b]$.

Teorema: Todo conjunto cerrado y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Recubrimiento: Sea A un conjunto de R y sea $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos abiertos de R, se dice que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto de A si $A \subset \bigcup_{i \in I}(F_i)$

Compacto: Se dice que $A \subset R$ es compacto si es cerrado y acotado.

Teorema de Heine-Borel: A es un compacto si, y solo si, todo recubrimiento abierto de A admite un subrrecubrimiento finito.

Se llama frontera de A al conjunto: $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{C(A)}$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Sea : $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n}, \dots \right\} \cup (2,5]$

Hallar:

a) $\overset{o}{A}$, b) $\overline{A}$, c) A' .

Solución:

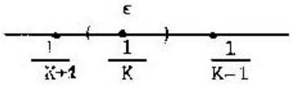
a) $\overset{o}{A} \subset A$ de la definición.

Veamos entonces de los puntos de A cuales son interiores:

$\frac{1}{K}$ no es interior a A pues (observese el dibujo).

Si tomamos:

$$\epsilon < \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}$$



se tiene: $V_{\epsilon}\left(\frac{1}{K}\right) \not\subset A$.

$5 \notin \overset{o}{A}$ pues $V_{\epsilon}(5) \not\subset A$ ya que $5 + \delta$ con $\delta < \epsilon$ es $5 + \delta \in V_{\epsilon}(5)$ y - $5 + \delta \notin A$.

Luego nos quedan solo los puntos del conjunto $(2,5)$ veamos que todos son interiores a A.

Sea:

$$x_o \in (2,5) \Rightarrow 2 < x_o < 5 \quad \Rightarrow \quad x_o - 2 > 0 \qquad 5 - x_o > 0$$

o sea:

$$x_o - 2 = h > 0 \quad y \quad 5 - x_o = K > 0$$

tomando entonces $\epsilon = \min(h,k)$ se tendrá que:

$$x_o \in V_{\epsilon}(x_o) \subset (2,5) \subset A.$$

Luego $\overset{o}{A} = (2,5)$.

b) $A \subset \overline{A}$, luego todos los puntos de A son adherentes a A, veamos si hay algunos más:

$0 \in \overline{A}$ pues dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$

Luego:

$$\frac{1}{n} \in A \quad y \quad \frac{1}{n} \in V_{\epsilon}(0) \Rightarrow A \cap V_{\epsilon}(0) \neq \phi$$

$2 \in \overline{A}$ pues dado $V_{\epsilon}(2)$ todos los puntos mayores que 2 que esten en - $V_{\epsilon}(2)$ también lo estan en A.

Cualquier otro punto ya no es adherente a A como facilmente se puede comprobar.

Luego:

$$\bar{A} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{n}, \dots \right\} \cup 0 \cup [2,5].$$

c) De entre los puntos adherentes a A $\frac{1}{K}$ $K \in N$ no son de acumulación pues tomando.

$$\varepsilon < \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \qquad V_\varepsilon\left(\frac{1}{K}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{K}\right\}$$

"0" si es de acumulación pues dado $\varepsilon > 0$ $\exists n \in N$ / $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y por tanto

$$\frac{1}{n+p} < \varepsilon \quad \forall p \in N \Rightarrow V_\varepsilon(0) \cap A \supset \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\}$$

Todos los puntos de $[2,5]$ también lo son obviamente.

Por tanto:

$$A' = \{0\} \cup [2,5].$$

> 2.- Demostrar que:
>
> a) $C\mathring{A} = \overline{CA}$ b) $C\bar{A} = \mathring{\overbrace{CA}}$

Solución:

a) Sea $x \in C\mathring{A} = x \notin \mathring{A} =$ Para todo entorno de x se tiene que

$$V_\varepsilon(x) \not\subset A \Rightarrow V_\varepsilon(x) \cap CA \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow x \in \overline{CA}$$

Luego:

$$C\mathring{A} \subset \overline{CA}$$

Por otra parte si $x \in \overline{CA} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad V_\varepsilon(x) \cap CA \neq \emptyset \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad V_\varepsilon(x) \not\subset A$

$$\Rightarrow x \notin \mathring{A} \Rightarrow x \in C\mathring{A}$$

Por tanto:

$$\overline{CA} \subset C\mathring{A}$$

Uniendo los dos resultados se tiene:

$$C\mathring{A} = \overline{CA}.$$

b) $x \in C\bar{A} \Rightarrow x \notin \bar{A} \Rightarrow$ existe un $\varepsilon > 0$ / $V_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad V_\varepsilon(x) \subset CA \quad \Rightarrow \quad x \in \mathring{CA}.$

Análogamente si $x \in \mathring{CA} \Rightarrow$ Existe $\varepsilon > 0 /\ x \in V_\varepsilon(x) \subset CA \Rightarrow$ Existe $\varepsilon>0$

tal que $V_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \notin \bar{A} \quad \Rightarrow \quad x \in C\bar{A}.$

> *3.- Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, decidir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:*
>
> *a) Si A y B son abiertos, también lo es $A \cup B$.*
>
> *b) Si A y B son cerrados, también lo es $A \cap B$.*
>
> *c) Si $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
>
> *d) $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cap\bar{B}$.*
>
> *e) $\overset{\circ}{\overline{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$.*

Solución:

a) Cierto pues si $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B \Rightarrow$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in V_\varepsilon(x) \subset A$ ó $x \in V_\varepsilon(x) \subset B$ pues A y B son abiertos $\Rightarrow$ $x \in V_\varepsilon(x) \subset A \cup B$ y por tanto $A \cup B$ es abierto.

b) También es cierto pues si A y B son cerrados $\Rightarrow$ CA y CB son abiertos $\Rightarrow$ $CA \cap B = (CA) \cup (CB)$ abiertos por ser unión de dos abiertos

c) Son ciertas obviamente pues $x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 /\ V_\varepsilon(x) \subset A \subset B \Rightarrow$

$$x \in \mathring{B}.$$

$x \in \bar{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \ V_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ pero $V_\varepsilon(x)\cap A \subset V_\varepsilon(x)\cap B \Rightarrow$

$$V_\varepsilon(x)\cap B \neq \emptyset$$

y por tanto:

$$x \in \bar{B}.$$

d) Falso, pues si tomamos por ejemplo $A = [1,2)$ $B = (2,3]$

$$A\cap B = \emptyset \text{ por lo tanto } \overline{A\cap B} = \emptyset.$$

Pero:

$$\bar{A} = [1,2],\ \bar{B} = [2,3] \ \text{ y } \ \bar{A}\cap\bar{B} = \{2\}.$$

e) Es cierto:

Si $x \in \overset{\circ}{\overline{A\cap B}} \Rightarrow$ Existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in V_\varepsilon(x) \subset A\cap B \Rightarrow V_\varepsilon(x) \subset A$ y $V_\varepsilon(x) \subset B$

Luego $x \in \mathring{A}$ y $x \in \mathring{B} \Rightarrow x \in \mathring{A}\cap\mathring{B}$.

Por otra parte si $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow$ Existen ε' y ε'' tales que -

$$x \in V_{\varepsilon'}(x) \subset A \quad y \quad x \in V_{\varepsilon''}(x) \subset B \ .$$

Tomando:

$$\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'').$$

se tendra que:

$x \in V_\varepsilon(x) \subset A$ y $x \in V_\varepsilon(x) \subset B \Rightarrow x \in V_\varepsilon(x) \subset A \cap B \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$.

4.- Demostrar que:

a) La unión de una familia finita o infinita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

b) La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos - es un abierto.

c) La intersección infinita de una colección de conjuntos abiertos no es, en general, un conjunto abierto.

Solución:

a) Sean $\{Ai\}_{i \in I}$ una familia de abiertos.

Si $x \in \bigcup_{i \in I} Ai \Rightarrow x \in Ai$ para algún $i \in I \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \ x \in V_\varepsilon(x) \subset Ai \subset \bigcup_{i \in I} Ai$

Luego $\bigcup_{i \in I} Ai$ es abierto.

b) Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ abiertos.

Si $x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \Rightarrow x \in A_1, x \in A_2, \ldots, x \in A_n \Rightarrow$ -

Existen:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ tales que $x \in V_{\varepsilon_1}(x) \subset A_1$, $x \in V_{\varepsilon_2}(x) \subset A_2 \ldots x \in V_{\varepsilon_n}(x) \subset A_n$

Luego si:

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n) \Rightarrow x \in V_\varepsilon(x) \subset Ai \text{ para } i = 1,2,\ldots n \Rightarrow -$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \ .$$

es abierto.

c) Basta considerar la familia de abiertos $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n \in N}$

Asi:

$$(-1,1)\cap(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2})\cap\ldots\cap(-\frac{1}{n}\ ,\ \frac{1}{n})\cap\ldots=\{0\}\ .$$

que no es abierto.

5.- De los siguientes conjuntos decir si son abiertos, cerrados o compactos:

a) R ; b) Q; c) $(1,3]$; d) $\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots\ \frac{1}{n},\ \ldots\}=A$

Solución:

a) R es abierto pues $\forall\ V_\varepsilon(x)\quad V_\varepsilon(x)\subset R$.

R es cerrado pues $\bar{R}=R$

R no es compacto por no ser acotado.

b) $\mathring{Q}=\phi$, $\bar{Q}=R$,

Luego Q no es abierto ni cerrado y por tanto tampoco es compacto. -

c) $\mathring{\overline{(1,3]}}=(1,3)$; $\overline{(1,3]}=[1,3]$

Luego tampoco es abierto ni cerrado.

d) $\mathring{A}=\phi$; $\bar{A}=A$;

Asi, A no es abierto, si es cerrado y también compacto

Pues:

$$A\subset[0,1]$$

y por tanto es acotado.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

6.- Hallar $\bar{A}$, $\overset{\circ}{A}$, A' siendo A el conjunto:

$$A = [1,3] \cup \{4\} \cup \left\{5+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}$$

Respuesta:

$$\bar{A} = [1,3] \cup \{4\} \cup \left\{5+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} \cup \{5\}$$

$$\overset{\circ}{A} = (1,3) \quad ; \qquad A' = [1,3] \cup \{5\}.$$

7.- Dar un ejemplo, si existe, de un conjunto con tres puntos de acumulación exactamente.

Respuesta:

$$A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} \cup \left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} \cup \left\{2+\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}$$

8.- Sean A y B dos subconjuntos de R, decidir si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si A y B son cerrados, también lo es $A\cup B$

b) Si A y B son abiertos, también lo es $A\cap B$

c) $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

d) $\overset{\circ}{\overline{A\cup B}} = \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$

Respuesta:

a), b), c) son ciertas; d) es falsa.

9.- Demostrar que:

a) La intersección finita o infinita de cerrados es un cerrado.

b) La unión finita de cerrados es cerrado.

c) La unión ininita de cerrados no es, en general, un cerrado.

10.- Clasificar los siguientes conjuntos (abiertos,cerrados ó compactos, etc...)

a) $\emptyset$ b) Z, c) I, d) (1,6), e) $\{3\}$.

Respuesta:

a) abierto, cerrado y compacto.

b) cerrado.

d) abierto.

e) cerrado y compacto.

11.- Escribir, si existen, ejemplos de:

a) Un conjunto cerrado con un solo punto de acumulación.

b) Un conjunto acotado no compacto.

c) Un conjunto abierto con un número finito de elementos.

d) Un conjunto con un sólo punto interior.

Respuesta:

a) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in N}$

b) $(1,3)$

c) No existe.

d) No existe.

LECCIÓN 2.-

EL NÚMERO COMPLEJO.

Definición: Se define como conjunto de los números complejos C al conjunto:

$$C = \{ (a,b) \ / \ a \in R, \ b \in R \}.$$

En particular, $(a,0) = a$, los números reales están contenidos en el conjunto de números complejos.

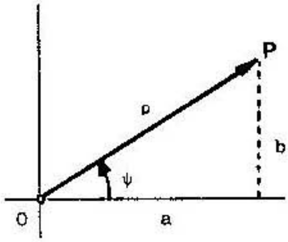
Se denomina unidad imaginaria, y se representa por "i" al número $(0,1)=i$

Un número complejo también se suele escribir en forma binómica escribiendo:

$$(a,b) = a + bi \ .$$

La forma (a,b) se denomina cartesiana.

Representación gráfica: Dado un número complejo (a,b) se representa en unos ejes coordenados poniendo "a" en el eje de abscisas y "b" en el de ordenadas, (ver figura), el número complejo se representa entonces por el vector $\overline{OP}$.



Módulo y argumento: Se define como módulo de (a,b) a la longitud de $\overline{OP}$.

Es decir, si $z = (a,b)$.

$$\boxed{\text{módulo de } \ z = |z| = |\ OP\ | = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho}$$

Argumento de $\boxed{z = \arg.(z) = \psi = \operatorname{artg} \frac{b}{a}}$, es decir, el ángulo que forma z con la parte positiva del eje de abscisas, en sentido contrario a las agujas del reloj. Observese que arg (z) no está determinando de manera única pues si $\arg (z) = \psi$ (en radianes) $\arg(z) = \psi + 2K\pi \quad K \in Z.$

Si $\psi \in (-\pi, \pi]$ se dice que ρ_ψ es el valor principal del nº complejo. Fl número complejo (a,b) se puede escribir también:

$$(a,b) = \rho_{\psi}.$$

y se denomina forma polar o módulo argumental.

Obsérvese que $a = \rho.\cos\psi$; $b = \rho.\mathrm{sen}\psi$.

Así:

$$\rho_{\psi} = \rho(\cos\psi + i\ \mathrm{sen}\psi).$$

Forma trigonométrica del número complejo.

Operaciones:

Dados $z = (a,b)$; $z' = (a',b')$ son iguales, $z = z'$, si $a = a'$, $b = b'$

En forma polar:

$\rho_{\psi} = \rho'_{\psi'}$; si $\rho = \rho'$; $\psi = \psi' + 2K\pi$ para algún $K \in Z$.

$(a,b) = 0$ si $a = 0$, $b = 0$; $\rho_{\psi} = 0$ si $\rho = 0$

Conjugado de $z = (a,b)$ se escribe $\bar{z} = (a,-b)$.

En forma polar:

$$\overline{\rho_{\psi}} = \rho_{-\psi}$$

Suma: Se define como $z + z'$ al número complejo:

$$z + z' = (a+a', b+b').$$

C, con la operación suma es un grupo conmutativo.

Multiplicación:

$$z . z' = (a.a' - b.b' , a.b' + a'.b)$$

En forma polar:

$$\rho_{\psi} . \rho'_{\psi'} = \rho\rho'_{\psi+\psi'}$$

$C - \left\{ 0 \right\}$ con la operación multiplicación es también un grupo conmutativo.

Así C con las operaciones suma y multiplicación es un cuerpo conmutativo.

De esta definición se sigue que:

$$i^2 = (0,1) . (0,1) = -1.$$

Así para multiplicar $(a + bi)(a' + b'i)$ se multiplican todos por todos aplicando la propiedad distributiva.

Resta:

$$(a,b) - (a',b') = (a,b) + (-a', - b') = (a - a', b - b').$$

División:

$$(a , b) : (a'.b') = (a,b) . (a', b')^{-1}$$

siendo:

$$(a' , b')^{-1}$$

el simétrico respecto a la multiplicación de:

$$(a' , b').$$

$$(a',b')^{-1} = \frac{1}{(a',b')} = \frac{(a', - b')}{(a')^2 + (b')^2}$$

Para obtener $(a',b')^{-1}$ es fácil si lo ponemos en forma binómica:

$$(a', b')^{-1} = \frac{1}{a' + b'i} =$$

(multiplicando y dividiendo por el conjugado).

$$= \frac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{a' - b'i}{(a')^2 + (b')^2}$$

En forma polar si ρ_ψ y $\rho'_{\psi'}$ son los valores principales de dos números complejos:

$$\rho_\psi : \rho'_{\psi'} = \frac{\rho_\psi}{\rho'_{\psi'}} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\psi - \psi'}$$

Potencias: Sea $z = (a,b) = a + bi = \rho_\psi$ y $n \in N$.

$$z^n = (a + bi)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} bi + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 i^2 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n} b^n i^n .$$

teniendo en cuenta que:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \; i^3 = - i, i^4 = 1 \;\ldots.\; i^k = i^{4p+r} = i^r$$

$$r = 0, 1, 2, 3.$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Si z está en forma polar: $z^n = (\rho^n)_{n\psi}$

Fórmula de De Moivre:

$$[\rho(\cos\psi + i\,\mathrm{sen}\,\psi)]^n = \rho^n(\cos.\,n\psi + i\,\mathrm{sen}\,n\psi).$$

Radicación:

$$\sqrt[n]{\rho_\psi} = (\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\psi + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

La raiz "n" de un número complejo tiene "n" soluciones correspondientes a cada uno de los valores de $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Fórmula de Euler:

$$e^{i\psi} = \cos.\psi + i.\mathrm{sen}.\psi \; .$$

Asi $\rho_\psi = \rho e^{i\psi}$ que se llama la forma exponencial de un número complejo.

De esta fórmula se deducen:

$$e^{-i\psi} = \cos.\psi - i.\mathrm{sen}.\psi \; ; \qquad \mathrm{sen}\,\psi = \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i}$$

$$\cos\psi = \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2}.$$

Logaritmos y potencias: Sea $z \in C$, se llama logaritmo neperiano de z a un $\lambda \in C$ tal que $e^\lambda = z$.

Si:

$$\lambda = x + iy \;, \quad z = r_\psi \,.$$

Se tendrá:

$$e^{x+iy} = r(\cos.\psi + i.\mathrm{sen}.\psi) = e^x e^{iy} = e^x(\cos\, y + i\mathrm{sen}y)$$

de donde:

$$r = e^x; \qquad \psi = y - 2k\pi \qquad k \in Z.$$

por tanto:

$$x = \ln r = \mathrm{Ln}\,|z| \qquad y = \psi + 2k\pi \,.$$

Luego:

$$Lnz = Ln\ |z| + i\ (\ \psi + 2k\pi\ ).$$

- El Lnz tiene infinitas soluciones.

- Si se toma $-\pi \leq \psi \leq \pi$ y $k = 0$ estamos en el valor principal del logaritmo.

Se define:

$$z^{z'} = e^{z'.Ln\ z}.$$

EJERCICIOS RESUELTOS .

1.- Representar gráficamente los conjuntos:

a) $A = \left\{ z \in C \;/\; z = \bar{z} \right\}$

b) $B = \left\{ z \in C \;/\; Re\,(z) = 3 \right\}$

c) $D = \left\{ z \in C \;/\; |z| \leq 1 \right\}$

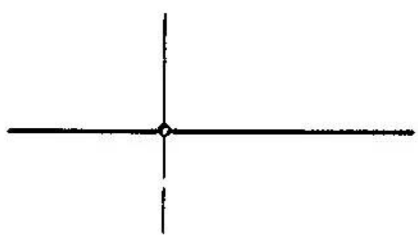
d) $E = \left\{ z \in C \;/\; |z| \leq 1,\; 0 \leq arg\,(z) \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

e) $F = \left\{ z \in C \;/\; |z-2| \leq 3 \right\}$

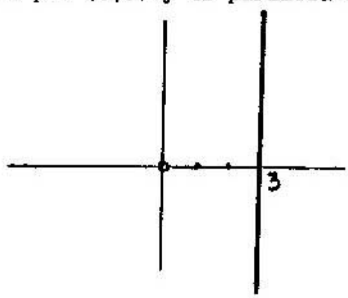
Solución:

a)

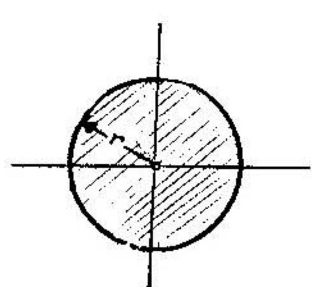
A = R eje de abscisas.



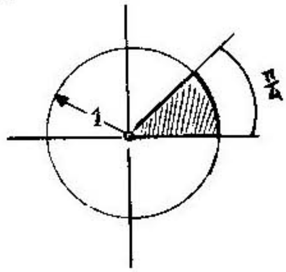
b) Recta que pasa por (3,0) y es paralela al eje imaginario .



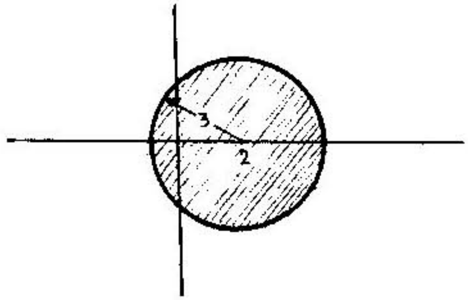
c) Circulo y circunferencia con centro en el origen y radio: r = 1



d) Sector circular y arco de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radi r=1 y angulo /4 desde el semieje real positivo.



e) Circulo y circunferencia de centro (2,0) y radio: r = 3.



2.- Escribir en todas las formas conocidas los siguientes números complejos:

a) $(1, \sqrt{3})$

b) $2_{\frac{\pi}{6}}$

c) $e^{i\frac{\pi}{4}}$

<u>Solución:</u>

a) Binómica: $1 + i\sqrt{3}$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2. \qquad \arg(z) = \text{artg.}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Polar:

$$2_{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

Trigonométrica:

$$2\ (\cos.\frac{\Pi}{3} + i\,\text{sen.}\ \frac{\Pi}{3}\ )$$

Exponencial:

$$2\ e^{i\ \frac{\Pi}{3}}$$

b) Trigonométrica:

$$2\ (\cos.\ \frac{\Pi}{6} + i\,\text{sen.}\ \frac{\Pi}{6})$$

Binómica:

$$2\ (\ \frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}\ ) = \sqrt{3} + i$$

Cartesiana:

$$(\ \sqrt{3}\ ,\ 1)$$

Exponencial:

$$2\,e^{i\ \frac{\Pi}{6}}$$

c) Trigonométrica:

$$\cos\ \frac{\Pi}{4} + i\,\text{sen.}\ \frac{\Pi}{4}$$

Binómica:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cartesiana:

$$(\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Polar:

$$1\ \Pi/_4$$

3.- Sean: $z = i,\quad w = 1 + i$

Hallar:

a) $\sqrt[5]{z}$

b) Lnz;

c) $z^{z^{z}}$

d) $lg_z w$.

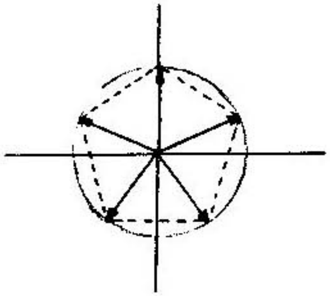
Solución:

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[5]{1}_{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}}$ $\quad K = 0,1,2,3,4.$

Luego las cinco raices son:

$1_{\frac{\pi}{10}}$, $1_{\frac{5\pi}{10}}$, $1_{\frac{9\pi}{10}}$, $1_{\frac{13\pi}{10}}$, $1_{\frac{17\pi}{10}}$

Graficamente:



Las raices se corresponden con los vértices de un pentágono regular inscrito en la circunferencia con centro el origen y radio r=1.

b) $Lni = \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = Ln1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

Valor principal:

$$Lni = i\,\frac{\pi}{2}.$$

c) $z^z = i^i = e^{iLni} = e^{i\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$

.

$z^{z^z} = (i)^{e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}} = e^{\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}\cdot Lni\right)} =$

$$= e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k'\pi)}.e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} =$$

$$= \cos((\frac{\pi}{2} + 2k'\pi)e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}) + i\,\text{sen}((\frac{\pi}{2} + 2k'\pi)e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}) =$$

....

d) $$Lg_z w = \frac{\text{Ln } w}{\text{Ln } z} = \frac{\text{Ln } |1 + i| + i\,(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}{\text{Ln } |i| + i\,(\frac{\pi}{2} + 2k'\pi)} =$$

$$= \frac{\text{Ln } \sqrt{2} + i\,(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}{i\,(\frac{\pi}{2} + 2k'\pi)} = \frac{(\frac{\pi}{4} + 2K\pi) - i\,\text{Ln } \sqrt{2}}{\frac{\pi}{2} + 2k'\pi}$$

4.- Resolver en C la ecuación: $\text{sen } z = 2$

Solución:

Sea: $z = x + iy.$

$$\text{senz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2\ ; \quad = \quad e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

Si $t = e^{iz}$; $e^{-iz} = \frac{1}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad t - \frac{1}{t} = 4i \quad \Rightarrow \quad t^2 - 1 = 4ti \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4ti - 1 = 0$

Luego:

$$t = \frac{4i \pm \sqrt{-16 + 4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4i \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 2i \pm i\sqrt{3} =$$

$$= \quad i\,(2 \pm \sqrt{3})$$

Así:

$$e^{iz} = i\,(2 \pm \sqrt{3})$$

Luego:

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos.\, x + i.\text{sen}.x)$$

$$|e^{iz}| = e^{-y} \qquad \text{y} \qquad \arg(z) = x + 2k\pi .$$

Luego:

$$Lne^{iz} = Lne^{-y} + i\,(x + 2k\pi) = -y + i\,(x + 2\,k\pi) = iz + i2k\pi .$$

Por tanto:

$$Lne^{iz} = iz + i2k\pi = Ln\left[\, i\,(2 \pm \sqrt{3}\,)\,\right] = Ln\,(2 \pm \sqrt{3}) + i\,(\frac{\pi}{2} + 2k'\pi).$$

Luego:

$$iz = Ln\,(2 \pm \sqrt{3}\,) + i\,(\frac{\pi}{2} + 2\,(k' - k)\pi) = Ln\,(2 \pm \sqrt{3}\,) +$$

$$+ i\,(\frac{\pi}{2} + 2k''\pi) \Rightarrow z = (\frac{\pi}{2} + 2k''\pi) - i\,Ln\,(2 \pm \sqrt{3}\,)$$

> *5.- Sea la ecuación* $z^2 + (a + bi)\,z + (c + di) = 0$
>
> $a \neq b \quad y \quad c \neq 0.$
>
> *Encontrar la relación que debe existir entre* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *para que las dos raices de dicha ecuación tengan el mismo argumento.*

Solución:

Sea la ecuación: $Ax^2 + Bx + C = 0.$

Si α_1 y α_2 son las dos raices de una ecuación de segundo grado, sabemos que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{B}{A} \; ; \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{C}{A}$$

En nuestro caso si:

$$\alpha_1 = r_{\psi} \qquad \alpha_2 = r'_{\psi} \quad .$$

Tendremos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (r + r') = -\,(a + bi)$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r \cdot r'_{2\psi} = (c+di)$$

Luego:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg}2\psi = \frac{d}{c}$$

y puesto que:

$$\operatorname{tg}2\,\psi = \frac{2\operatorname{tg}\psi}{1-(\operatorname{tg}\psi)^2}$$

tendremos:

$$\frac{d}{c} = \frac{2\,\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\,ab}{a^2-b^2}$$

Luego la relación es:

$$\frac{d}{c} = \frac{2\,ab}{a^2-b^2}$$

> *6.- Demostrar que:*
>
> $$1 + 1_{\frac{2\pi}{n}} + 1_{\frac{4\pi}{n}} + \dots + 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} = 0 \quad \text{si } n \geq 2.$$

<u>Solución:</u>

a) $$1 + 1_{\frac{2\pi}{n}} + 1_{\frac{4\pi}{n}} + \dots + 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} = e^0 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\frac{4\pi i}{n}} + \dots + e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}$$

Es una progresión geométrica de razón $e^{\frac{2\pi i}{n}}$

Luego:

$$1 + 1_{\frac{2\pi}{n}} + \dots + 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}} = \frac{e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} =$$

$$= \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}n} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = \frac{e^{2\pi i} - 1}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}$$

y puesto que $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1.$ y $e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq 1$ si $n \neq 1.$

ya estaría.

b) De otra forma:

Obsérvese que $1, 1_{\frac{2\pi}{n}}, \dots 1_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}$ son las soluciones de la ecuación $z^n - 1 = 0$ que como veremos en la lección 8ª, la suma de todas ellas es el término de grado (n-1) cambiado de signo, luego en nuestro caso: cero.

> *7.- Probar las identidades:*
>
> *a) $\cos 5\psi = 16 \cos^5\psi - 20 \cos^3\psi + 5 \cos\psi$.*
>
> *b) $\operatorname{sen}^3\psi = \frac{3}{4} \operatorname{sen}\psi - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\psi$.*

Solución:

a) De la formula de De Moivre.

$(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)^5 = \cos 5\psi + i \operatorname{sen} 5\psi =$

$\cos^5\psi + i5\cos^4\psi \operatorname{sen}\psi - 10 \cos^3\psi \operatorname{sen}^2\psi - i10 \cos^2\psi \operatorname{sen}^3\psi + 5 \cos\psi \operatorname{sen}^4\psi + i \operatorname{sen}^5\psi$.

Se tiene:

$\cos 5\psi = \cos^5\psi - 10 \cos^3\psi \operatorname{sen}^2\psi + 5 \cos\psi \operatorname{sen}^4\psi =$

$= \cos^5\psi - 10 \cos^3\psi (1-\cos^2\psi) + 5 \cos\psi (1-\cos^2\psi)(1-\cos^2\psi) =$

$16 \cos^5\psi - 20 \cos^3\psi + 5 \cos\psi$.

b) $\operatorname{sen}^3\psi = \frac{(e^{i\psi} - e^{-i\psi})^3}{(2i)^3} = -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\psi} - 3e^{2i\psi}e^{-i\psi} + 3e^{i\psi}e^{-2i\psi} - e^{-3i\psi}\right] = -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\psi} - 3e^{i\psi} + 3e^{-i\psi} - e^{-3i\psi}\right] = -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{3i\psi} - e^{-3i\psi}}{2i} -\right.$

$$- \frac{3(e^{i\psi} - e^{-i\psi})}{2i} \Big] = -\frac{1}{4}\Big[\operatorname{sen} 3\psi - 3 \operatorname{sen} \psi \Big] =$$

$$= \frac{3}{4} \operatorname{sen}\psi - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\psi \quad .$$

> *8.- Resolver en C la ecuación:*
>
> $$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

Solución:

Si llamamos $t = z^3$

se tiene:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$$

Luego:

$$z^3 = t = 8 \quad ó \quad z^3 = t = 1$$

Por tanto:

$$z = \sqrt[3]{8} = 2_{\frac{2k\pi}{3}} \qquad k = 0,1,2.$$

$$z = \sqrt[3]{1} = 1_{\frac{2k\pi}{3}} \qquad k = 0,1,2,$$

Así:

$$z_1 = 2; \; z_2 = 2_{\frac{2\pi}{3}} \; ; \; z_3 = 2_{\frac{4\pi}{3}} \; ; \; z_4 = 1, \; z_5 = 1_{\frac{2\pi}{3}} \; ; \; z_6 = 1_{\frac{4\pi}{3}} \; .$$

> *9.- Si $n \in N$ si $n > 1$ Demostrar que:*
>
> $$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{n} \ldots\ldots \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Solución:

Sea la ecuación $z^n - 1 = 0$.

Las soluciones son:

$$1, e^{\frac{2\pi}{n} i}, e^{\frac{4\pi}{n} i}, \ldots\ldots e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i}$$

Luego:

$$z^n - 1 = (z-1)(z-e^{\frac{2\pi i}{n}}) \ldots\ldots (z-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i})$$

o bien dividiendo por z-1:

$$\frac{z^n-1}{z-1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z^2 + z + 1 = (z-e^{\frac{2\pi i}{n}})(z-e^{\frac{4\pi i}{n}}) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots (z-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i})$$

Igualdad, que para $z = 1$ nos queda:

$$n = (1-e^{\frac{2\pi}{n}i})(1-e^{\frac{4\pi}{n}i}) \ldots\ldots (1-e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i})$$

Si tomamos conjugados en ambos miembros:

$$n = (1-e^{-\frac{2\pi}{n}i})(1-e^{-\frac{4\pi}{n}i})(1-e^{-\frac{6\pi}{n}i}) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots (1-e^{-\frac{2(n-1)\pi}{n}i})$$

Puesto que:

$$(1-e^{\frac{2k\pi}{n}i})(1-e^{-\frac{2k\pi}{n}i}) = 1 + e^{\frac{2k\pi}{n}i - \frac{2k\pi}{n}i} -$$

$$- e^{\frac{2k\pi}{n}i} - e^{-\frac{2k\pi}{n}i} = 2 - (\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}) -$$

$$- (\cos\frac{2k\pi}{n} - i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}) = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

tendremos:

$$n^2 = (2-2\cos\frac{2\pi}{n})(2-2\cos\frac{4\pi}{n}) \ldots\ldots (2-2\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}) =$$

$$= 2^{n-1}(1-\cos\frac{2\pi}{n})(1-\cos\frac{4\pi}{n}) \ldots (1-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}) =$$

$$= 2^{n-1}.2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n} . 2\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{n} . 2\operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{n} \ldots 2\operatorname{sen}^2\frac{(n-1)\pi}{n} \Rightarrow$$

$$n^2 = 2^{2n-2}.\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n} . \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{n} \operatorname{sen}^2\frac{3\pi}{n} \ldots\operatorname{sen}^2\frac{(n-1)\pi}{n} \Rightarrow$$

tomando raices cuadradas:

$$n = 2^{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cdots \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{n} \cdots \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

10.- Representar gráficamente los conjuntos:

$$A = \left\{ z \in C \;/ + 2 \leq |z| \leq 4 \right\} \qquad B = \left\{ z \in C / \left|\frac{z-3}{z+3}\right| \leq 2. \right\}$$

11.- Calcular, poniendo los números complejos en la forma más conveniente:

a) $(1 + i)^8$ b) $\sqrt{i}$ c) $\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

12.-Determinar $z \in C$ en el siguiente sistema:

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$$

13.-Resolver las ecuaciones:

a) $\mathrm{Ln} z = \frac{\pi}{2} i$

b) $e^z = -2$

14.-a) Demostrar que si una ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

con $a_i \in R$ $i = 1,2,\dots n$ admite como raiz $x = \alpha + \beta i$, también admite $\bar{x}$.

b) Demostrar que para que una ecuación

$$x^2 + bx + c + 0$$

con $b,c \in C$ admita como soluciones dos raices complejas conjugadas, es necesario y suficiente que b y c sean reales y que $b^2 - 4c < 0$.

15.-Hallar el producto de las n raices enésimas de la unidad.

Calcular:

a) $(i^i)^i$

b) $\lg_{1-i} i$

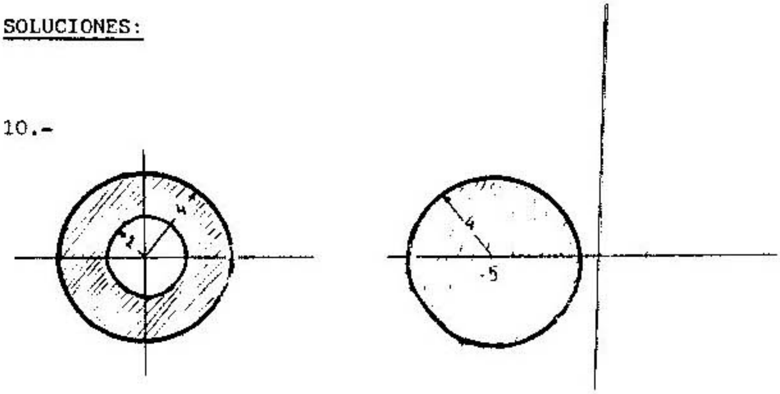
16.-Probar las igualdades:

a) $\frac{\operatorname{sen} 5\theta}{\operatorname{sen} \theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1.$ si $\theta \neq k\pi$ $k \in Z.$

b) $\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$

SOLUCIONES:

10.-



11.- a) 16 b) $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ c) $i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$

12.- $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

13.- a) $z = i$ b) $z = \mathrm{Ln}\,2 + i\,(1 + 2k)\pi$.

14.- $z_1, z_2 \ldots z_n = \pm 1$

15.- a) $-i$

b) $$\frac{\left(\frac{\pi}{4} - 2k'\pi\right)\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mathrm{Ln}\sqrt{2}}{\left(\mathrm{Ln}\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{4} + 2k'\pi\right)^2}$$

LECCION 3.-

SUCESIONES.

Definiciones:

a) Una sucesión es una aplicación ,f, de los números naturales en los números reales:

$$f(n) = a_n \in R \quad n \in N.$$

Se suele escribir dando el conjunto imagen:

$$a_1,\ a_2, a_3 \dots a_n \dots = (a_n)\ n \in N.$$

b) Una sucesión se dice monótona:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Creciente}\\ \text{Decreciente}\end{array}\right\}\ \text{si}\ \left\{\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1}\end{array}\right.$$

para todo $n \in N$.

Se dice estrictamente:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Creciente}\\ \text{Decreciente}\end{array}\right\}\ \text{si}\ \left\{\begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1}\end{array}\right. \qquad \forall_n \in N$$

Se dice monótona si es creciente o decreciente.

c) Una sucesión es acotada superiormente o inferiormente si existe un

$$\text{número}\ \left.\begin{array}{r} K \in R \\ k \in R\end{array}\right\}\ \text{tal que}\ \left\{\begin{array}{l} a_n \leq K \\ a_n \geq k\end{array}\right. \qquad \forall n \in N.$$

Una sucesión se llama acotada si está acotada superior e inferiormente.

Proposición: $(a_n)_{n \in N}$ está acotada si y solo si existe $M \in R$ tal que $|a_n| \leq M \quad \forall n \in N$

d) Una sucesión se denomina de Canchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in N \ / \ \forall p,q \in N \quad \begin{array}{l} p > N \\ q > N \end{array} \Rightarrow |a_p - a_q| < \varepsilon$$

e) Una sucesión tiene como limite L si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N / \quad \forall n > N \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon .$$

Una sucesión se dice convergente si tiene limite, en caso, contrario se dice divergente.

<u>Teorema:</u> Una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy.

<u>Proposición 1.-</u> Si una sucesión tiene limite, este es único.

<u>Proposición 2.-</u> Toda sucesión convergente está acotada.

<u>Proposición 3.-</u> Toda sucesión monótona creciente (ó decreciente) y acotada superiormente (ó inferiormente) tiene limite.

<u>Proposición 4.-</u> Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que $\text{Lim } a_n = a$ $\text{Lim } b_n = b$, entonces:

a) $\text{Lim } (a_n + b_n) = a + b$.

b) $\text{Lim } (a_n - b_n) = a - b$.

c) $\text{Lim } a_n b_n = ab$.

d) si $b_n \neq 0 \ \forall_n$ y $b \neq 0$: $\text{Lim } \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

<u>Proposición 5.-</u> Si (a_n) es tal que $a_n \geq 0 \ \forall_n \in N$ y $\text{Lim } a_n = a$ entonces $a \geq 0$.

<u>Proposición 6.-</u> Si $\text{Lim } a_n = a > 0$ entonces $\exists N / \forall n > N \quad a_n > 0$.

<u>Limites infinitos:</u>

Se dice que $\text{Lim } a_n = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases}$ si $\forall K \in R, \exists n_0$ tal que si $n > n_0$ se tiene que $\begin{cases} a_n > K \\ a_n < K \end{cases}$

<u>Proposición:</u> Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones con $\text{Lim } a_n = a$ - $\text{Lim } b_n = b$.

a) Si $a = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Lim}\,(a_n + b_n) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

b) Si $a = b = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Lim}\,(a_n + b_n) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

c) Si $a = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ y $b > 0 \Rightarrow \text{Lim}\, a_n\, b_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

Si $a = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ $b > 0 \Rightarrow \text{Lim}\, a_n\, b_n = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$

d) Si $a = +\infty$ ó $a = -\infty \Rightarrow \text{Lim}\, \dfrac{1}{a_n} = 0.$

e) Si $a = 0$ y $a_n \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Lim}\, \dfrac{1}{a_n} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

<u>Criterio de Stoltz:</u>

Sea (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que $\text{Lim}\, \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = L$

Si la sucesión b_n es creciente y $\text{Lim}\, b_n = +\infty$, se tiene también - que $\text{Lim}\, \dfrac{a_n}{b_n} = L.$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Sea la sucesión :

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 1}$$

Estudiar monotonía y acotación de dicha sucesión. Demostrar que $\lim a_n = 1.$

Solución:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 1} = 1 + \frac{n}{n^2 + n + 1}$$

Puesto que $0 < n < n^2 + n + 1$ se tiene que:

$$0 < \frac{n}{n^2 + n + 1} < 1$$

Luego:

$$1 < a_n < 2$$

Por tanto está acotada.

Por otro lado:

$$a_n - a_{n+1} = 1 + \frac{n}{n^2 + n + 1} - 1 - \frac{n + 1}{(n + 1)^2 + (n + 1) + 1} =$$

$$= \frac{n}{n^2 + n + 1} - \frac{n + 1}{n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1} =$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n - n^3 - n^2 - n - n^2 - n - 1}{(n^2 + n + 1)(n^2 + 3n + 3)} =$$

$$= \frac{n^2 + n - 1}{(n^2 + n + 1)(n^2 + 3n + 1)} > 0$$

Luego $a_n - a_{n+1} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$ Por tanto la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Veamos por último que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe un $p \in N$ tal que para todo $n > p$ es $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

En este caso será:

$$| a_n - 1| = \frac{n}{n^2 + n + 1} < \frac{n}{n^2 + n} = \frac{1}{n + 1} < \varepsilon$$

2.- Dar ejemplos, si existen, de:

a) Una sucesión convergente no monótona.

b) Una sucesión no acotada y convergente.

c) Dos sucesiones divergentes tales que su suma sea convergente.

d) Dos sucesiones convergentes tales que su cociente sea divergente.

Solución:

a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

b) No existe por la Proposición 2.

c) $a_n = n \qquad b_n = -n \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n = 0$ convergente.

d) $a_n = 1 \qquad b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = n$ divergente.

3.- Demostrar que:

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} \right) = \infty$$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} + \dots$$

$$\cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+n}} = \frac{n}{\sqrt[3]{2n}} = \sqrt[3]{\frac{n^2}{2}} > K$$

para todo k desde un n en adelante.

> *4.- Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$$

Solución:

Sean $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $Y_n = n$.

Por el criterio de Stoltz se tendrá:

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{Y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = a.$$

> *5.- Si $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $n = 1, 2, \ldots..$*
>
> *Demostrar que a_n converge y que $a_n < 2$ para $n = 1,2,\ldots$*

Solución:

Veamos primero que $a_n < 2$. Procedemos por inducción: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Supongamos que $a_n < 2$ y veamos que $a_{n+1} < 2$.

En efecto:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow a^2_{n+1} = 2 + a_n < 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_{n+1} < 2.$$

Por otra parte a_n es creciente puesto que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2 + a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}} \quad \text{y por ser } a_n < 2 \text{ es:}$$

$$\frac{2}{a_n^2} > \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}, \text{ Luego: } \frac{a_{n+1}}{a_n} > \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow$$

$a_{n+1} > a_n$. Así, a_n es creciente y acotada y por lo tanto convergente.

> *6.- Calcular el siguiente límite:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}$$

Solución:

Si $p > q$ dividiendo numerador y denominador por n^p obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0/n^{p-q} + b_1/n^{p-q+1} + \dots + b_q/n^p}$$

y los $\frac{a_i}{n^h} \longrightarrow 0$, Luego el límite es ∞.

Si $p < q$ dividiendo por n^q se llega a que el límite vale 0 con un proceso similar al anterior. En el caso $p=q$ el resultado es a_0/b_0.

> *7.- Sean α_n y β_n dos sucesiones tales que $\lim \alpha_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$. Demostrar que:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta_n} = e^{\lim \beta_n(\alpha_n - 1)}$$

Solución:

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \Rightarrow \alpha_n = 1 + \delta_n$ siendo δ_n otra sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Asi:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} (1+\delta_n)^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1/\delta_n}\right)^{\beta_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{1/\delta_n}\right)^{\frac{1}{\delta_n}\cdot \delta_n \cdot \beta_n} = e^{\lim_{n\to\infty} \delta_n \cdot \beta_n} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \beta_n(\alpha_n - 1)}$$

8.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+1}{2n^2-n+2}\right)^{\dfrac{n^3+3}{2-n^3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2/n-2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$

Soluciones:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2-n+2}\right)^{\frac{n^3+3}{2-n^3}} =$$

$$= \left[\operatorname{Lim} \frac{n^2+n+1}{2n^2-n+2}\right]^{\operatorname{Lim}\frac{n^3+3}{2-n^3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.$$

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \operatorname{Lim} \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \operatorname{Lim} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \operatorname{Lim} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

$$\text{c) } \operatorname{Lim} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2/n-2} = \operatorname{Lim} \left(1+\frac{n}{n^2+n+1}\right)^{n^2/n-2} =$$

$$= \operatorname{Lim} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}\cdot\frac{n}{n^2+n+1}\cdot\frac{n^2}{n-2}} =$$

$$= e^{\operatorname{Lim} \frac{n}{n^2+n+1}\cdot\frac{n^2}{n-2}} = e$$

d) Por el criterio de Stoltz:

$$\text{Lim} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \text{Lim} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 - 1^2 - 2^2 \ldots - (n-1)^2}{n^3 - (n-1)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1} = \text{Lim} \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{1}{3}$$

> *9.- Calcular:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right)$$

Solución:

$$\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} = \frac{(p+1)(1^p + 2^p + \ldots + n^p) - n^{p+1}}{(p+1)\, n^p}$$

Luego por el criterio de Stoltz:

$$\text{Lim} \left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) =$$

$$= \text{Lim} \frac{(p+1)(1^p+2^p+\ldots+n^p) - (p+1)(1^p+2^p+\ldots+(n-1)^p) - n^{p+1} + (n-1)^{p+1}}{(p+1)n^p - (p+1)(n-1)^p} =$$

$$= \text{Lim} \frac{(p+1)\, n^p - n^{p+1} + (n-1)^{p+1}}{(p+1)n^p - (p+1)(n-1)^p} =$$

$$= \text{Lim} \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + n^{p+1} - (p+1)n^p + \frac{(p+1)^p}{2} n^{p-1} + \ldots\ldots}{(p+1)n^p - (p+1)n^p + p(p+1)n^{p-1} + \ldots\ldots} =$$

$$= \frac{\frac{p\,(p+1)}{2}}{p\,(p+1)} = \frac{1}{2}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

10.- Estudiar monotonía y acotación de las sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

b) $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

Solución:

a) Acotada y no monótona.

b) Acotada y creciente.

11.- Demostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2 + 1} = 1$

12.- Dar ejemplos, si existen, de:

a) Una sucesión monótona decreciente no convergente.

b) Dos sucesiones divergentes tales que su cociente sea convergente.

c) Dos sucesiones no convergentes que su producto sea convergente.

Solución:

a) $a_n = -n$

b) $a_n = n \quad b_n = n$

c) $a_n = (-1)^n \quad b_n = (-1)^{n+1}$

13.- Demostrar que existe:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$$

14.- Calcular los siguientes límites:

a) $\operatorname{Lim} \dfrac{n^3 + 3n + n^4 - 5}{3n^4 + n - 1}$

b) $\operatorname{Lim}\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 - 1}}$

c) $\text{Lim} \left(\frac{n + 2}{n + 3}\right)^{\frac{n^2}{n - 1}}$

d) $\text{Lim} \ \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p + 1}}$

Solución:

a) $\frac{1}{3}$

b) -1

c) e^{-1}

d) $\frac{1}{p + 1}$

15.- Demostrar que:

$$e = \text{Lim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

está comprendido entre 2 y 3.

16.- Demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1; \quad a > 0.$$

LECCION 4.-

SERIES NUMERICAS.

Definición: Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión numérica y sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. - llamaremos serie a la sucesión $\{S_n\}_{n\in N}$. Normalmente se suele escribir la serie con el simbolo: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si converge la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. - Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} Sn = S \quad \text{si} \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, N/n \quad N: \left|\sum_{i=1}^{n} a_i - S\right| < \varepsilon .$$

Criterio de Cauchy: Es una aplicación directa del criterio de Cauchy - para sucesiones. En este caso quedaria así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si y solo si } \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, N/p,q > N \quad |a_{p+1}+a_{p+2}+\dots+a_q| < \varepsilon .$$

Se dice que una serie es divergente cuando $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ y diremos que es oscilante cuando no existe $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Condición necesaria de convergencia: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Resto de una serie R_k : Es el resultado de suprimir en la serie los "K" primeros terminos: $R_k = \sum_{n=K+1}^{\infty} a_n$

Propiedades generales de las series.

I) Si $\lim_{k\to\infty} R_k = 0$; entonces la serie converge.

II) El caracter de una serie no se altera si se suprimen los "K" primeros terminos.

III) No se altera el caracter de una serie cuando todos sus terminos se multiplican por una constante, $\lambda \neq 0$.

IV) No se modifica el caracter de una serie si se sustituyen grupos de terminos por sus correspondientes sumas.

Series de terminos positivos: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es una serie de terminos positivos si $a_n \in R$ y $a_n \geq 0$ $\forall n \in N$.

Se llama serie mayorante de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a toda otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $a_n \leq b_n$ $\forall_n \in N$.

Se denomina serie minorante de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $a_n \geq b_n$ $\forall_n \in N$.

Criterio general de convergencia: Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de terminos positivos. Esta serie converge ó diverge si existe una serie mayorante ó minorante que sea convergente ó divergente.

Consecuencia: Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq 0$ las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo caracter.

Serie geométrica: Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$. Si $|r|<1$ la serie converge y es $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$. En el caso $|r| \geq 1$ la serie diverge.

Serie armónica: Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, que converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leq 1$.

Por comparación de una serie de terminos positivos con estas dos últimas series se obtienen los siguientes criterios de convergencia:

1.- Criterio del cociente: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de terminos positivos y sea $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Si $\lambda < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y si $\lambda > 1$ la serie es divergente. En el caso $\lambda = 1$ no podemos decir nada, no obstante si $\lambda = 1$ y desde un termino en adelante:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

entonces la serie es divergente.

2.- Criterio de la raiz: Sea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Si $\lambda<1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si $\lambda>1$ la serie es divergente. Si $\lambda = 1$ y es $\sqrt[n]{a_n} > 1$ desde un termino en adelante, la serie diverge.

3.- Criterio de Raabe: Sea $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$. Si $\lambda > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\lambda < 1$ la serie diverge y si $\lambda = 1$ y es -

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$$

desde un termino en adelante, la serie diverge.

4.- Criterio de Pringsheim: Si $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = \lambda$, según el valor de α y el de λ se obtiene el siguiente resultado:

$$\text{Si } \alpha > 1 \text{ y } \lambda \neq \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

$$\text{Si } \alpha \leq 1 \text{ y } \lambda \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

5.- Criterio logaritmico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Ln} \frac{1}{a_n}}{\operatorname{Ln} n} = \lambda$$

la serie converge cuando $\lambda > 1$ y diverge si $\lambda < 1$.

Series alternadas: Son las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde signo $(a_i) \neq$ signo (a_{i+1}) para todo i = 1,2,....

Teorema de Leibnitz: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie alternada. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ - y $|a_n| > |a_{n+1}|$ $\forall n \in N$, entonces la serie converge.

Además si se toma como valor de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, en el caso en que converja

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

el error que se comete es menor que $|a_{n+1}|$

Series de terminos arbitrariamente positivos y negativos. Son series - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en las que, independientemente del valor n, siempre existen terminos posteriores con signos contrarios.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de terminos de signos arbitrarios y -

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Llamaremos P_n a la suma de los terminos positivos que entran en S_n y Q_n a la suma de los valores absolutos de los negativos.

Asi:

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

<u>Proposición:</u> Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es incondicionalmente convergente si su suma permanece invariable sea cual sea la reordenación de sus terminos. Análogamente incondicionalmente divergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será condicionalmente convergente si al ordenar sus terminos de distinta forma se obtienen resultados distintos.

<u>Teorema de Riemann:</u> Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, pero no absolutamente convergente, se pueden ordenar sus terminos de tal forma que su suma sea un número cualquiera fijado.

<u>Teorema de Dirichlet:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es incondicionalmente convergente si, y solo si, es absolutamente convergente.

<u>Series de números complejos:</u> Son series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde:

$$a_n = u_n + iv_n$$

Si es:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad V_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergen.

<u>Proposición:</u> Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

<u>Suma de series:</u> Vemos aqui como se suman algunas series especiales.

a) <u>Serie aritmético-geométrica:</u> Son las del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an + b}{r^n}$$

su suma es:

$$\frac{a\,r + b(r - 1)}{(r - 1)^2}$$

b) <u>Serie Hipergeométrica:</u> Es una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha .\, n + \beta}{\alpha .\, n + \gamma}$$

La suma vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n(n.\alpha + \beta) - a_1\,\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$$

c) Las series en las que el termino general se puede descomponer en la forma:

$$a_n = f\,(n + 1) - f\,(n)$$

En este caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -f(1) + \lim_{n \to \infty} f(n + 1)$$

d) Veremos otras formas de sumar series por reducción a otras cuyas sumas ya conocemos.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Encontrar una serie de terminos positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{tal que} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

y que sea divergente.

Solución: La serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

y por otra parte:

$$S_n = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} > 1+ \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \underbrace{\frac{1}{16} + \ldots + }_{8}\frac{1}{16} + \ldots\ldots$$

$$\ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}$$

Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \;\ldots\ldots\ldots = \infty$$

y por tanto es divergente.

2.- Estudiar el caracter de las series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$$

$$x > 0$$

Solución: Aplicando el criterio del cociente se tiene:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n-1}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n-1)} = \frac{1}{2} < 1$$ Luego es convergente.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n/n!}{x^{n-1}/(n-1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0 < 1$ Luego es convergente.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)x^n}{[2(n-1)+1]x^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n-1}\, x = x$

Asi, la serie es convergente para $0 \leq x < 1$, divergente para $x > 1$ y para $x = 1$ la serie es:

$$3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) + \ldots$$

que es divergente.

> *3.- Estudiar el caracter de las series:*
>
> *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n + \dfrac{2n}{n-1}\right]^{-n}$

Soluciones:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0 < 1$. Luego es convergente.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n + \dfrac{2n}{n-1}\right]^{-1} = (e+2)^{-1} = \dfrac{1}{e+2} < 1$

convergente.

> *4.- Estudiar el caracter de las series:*
>
> *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$
>
> *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots.2n}$
>
> *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}$

Solución:

Si aplicamos el criterio del cociente en los dos primeros casos, obtendriamos:

a) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{n+1}} \longrightarrow 1$

b) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{1.3.5..(2n+1)}{2.4....2(n+1)}}{\dfrac{1.3.5..(2n-1)}{2.4.....2n}} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \longrightarrow 1$

Apliquemos, entonces, el criterio de Raabe.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}}$

Ahora bien: $\underset{t\to 0}{e^t - 1} \simeq t \Rightarrow \underset{t\to 0}{a^t - 1} = \underset{t\to 0}{e^{Lna^t} - 1} = \underset{t\to 0}{e^{tLna} - 1} \simeq t.Lna.$

Luego:

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}} \text{ Lim} = \dfrac{-\frac{1}{n+1} Ln \frac{1}{5}}{\frac{1}{n}} =$

$= Ln\ 5 > 1.$

Por lo tanto la serie es convergente.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n.\dfrac{2n+2-2n-1}{2n+2} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+2} = \dfrac{1}{2} < 1.$

Luego la serie es divergente.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)/_{b(b+1)...(b+n)(b+n+1)}}{a(a+1)...(a+n)/_{b(b+1)...(b+n)}}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{a+n+1}{b+n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\ \dfrac{b+n+1-a-n-1}{b+n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(b-a)\ n}{b+n+1} = b - a$

Luego si: $b - a > 1 \Rightarrow b > 1 + a$ La serie es convergente.

si $b - a < 1 \Rightarrow b < 1 + a$ La serie es divergente

si $b = 1 + a$ La serie es: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a\ (a+1)...(a+n)}{(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+n+1}$$

que es divergente pues

$$\text{Lim}\ n^{\alpha} \cdot a_n = \text{Lim}\ n^{\alpha} \frac{1}{a+n+1} = 1 \quad \text{para} \quad \alpha = 1$$

(criterio de Pringsheim).

> *5.- Estudiar el caracter de las series:*
>
> a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
>
> c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{n^3}$

Solución:

a) Por el criterio de Pringsheim:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

Para:

$$\alpha = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Luego la serie es divergente.

$$\text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n.(n+1)}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Luego es convergente.

c) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n^3} < \dfrac{\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{n}}{n^3} = \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$

Luego: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

armónica con $\alpha = 2 > 1$, Luego la serie que estudiamos es convergente.

> *6.- Obtener la formula para sumar las series aritmético-geomé- tricas y aplicarla para sumar la serie:*
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Solución:

Sea la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{r^n}$ con $r > 1$.

$$S_n = \frac{a+b}{r} + \frac{2a+b}{r^2} + \frac{3a+b}{r^3} + \ldots + \frac{na+b}{r^n}$$

multiplicando por "r".

$$r.\ S_n = a + b + \frac{2a+b}{r} + \frac{3a+b}{r^2} + \ldots + \frac{na+b}{r^{n-1}}$$

Luego:

$$rS_n - S_n = (a+b) + \left[\frac{2a+b}{r} - \frac{a+b}{r}\right] + \left[\frac{3a+b}{r^2} - \frac{2a+b}{r^2}\right] + \ldots$$

$$+ \left[\frac{na+b}{r^{n-1}} - \frac{(n-1)(a+b)}{r^{n-1}}\right] - \frac{na+b}{r^n} = (a+b) + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots$$

$$+ \frac{a}{r^{n-1}} - \frac{na+b}{r^n}$$

Asi: $S_n\ (r-1) = a + b + a\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right) - \frac{na+b}{r^n}$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(r-1) = S(r-1) = a+b+a\,\frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = a+b+\frac{a}{r-1} = \frac{a\ r + b(r-1)}{r-1}$$

Asi:

$$S = \frac{ar + b\,(r - 1)}{(r - 1)^2}$$

En el caso $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$: a = 1; b = 0; r = 2.

y se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{2}{1^2} = 2$$

> *7.- Sumar la serie:*
>
> $$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots\ldots$$

Solución:

El termino general de esta serie es:

$$a_n = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)}$$

y es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)}}{\dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)}} = \frac{2n - 1}{2n + 5}$$

Luego es una serie hipergeométrica. Sumemosla:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n - 1}{2n + 5} \Rightarrow \qquad 2n\,a_{n+1} + 5a_{n+1} = 2na_n - a_n.$$

Dando a n los valores n = 1,2...K-1 obtenemos:

$n = 1$: $\qquad 2a_2 + 5a_2 = 2a_1 - a_1$

$n = 2$: $\qquad 4a_3 + 5a_3 = 4a_2 - a_2$

$n = 3$: $\qquad 6a_4 + 5a_4 = 6a_3 - a_3$

....

$n = k-1$ $\qquad 2(k - 1)a_k + 5a_k = 2(k - 1)\,a_{k-1} - a_{k-1}$

Sumando:

$$2a_2 + 4a_3 + 6a_4 + \ldots + 2(k - 1)a_k + 5(a_2 + a_3 + \ldots + a_k) = 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 +$$

$$\ldots + 2(k - 1)\,a_{k-1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) \Rightarrow$$

$$5(a_2 + a_3+\dots+a_k) + (a_1 + a_2+\dots+a_{k-1}) = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3+\dots+2a_{k-1} -$$

$$- 2(k-1)\, a_k \Rightarrow \quad 5(a_1 + a_2+\dots+a_k) -5a_1 + (a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+a_k) -a_k =$$

$$= 2(a_1+a_2+\dots+a_{k-1}+a_k)-2a_k - 2(k-1)a_k \Rightarrow 4\, S_k = 5a_1+a_k-2a_k - 2ka_k+ 2a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4S_k = 5a_1 + a_k-2ka_k$$

Luego:

$$S_k = \frac{5a_1 + a_k - 2ka_k}{4}$$

y por tanto

$$S = \lim_{n\to\infty} S_k = \frac{5a_1}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1.3.5} = \frac{1}{12}$$

8.- Sabiendo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{y que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Obtener la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 1 - 5n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n - 5}{(n-2)^2(n+1)}$

c) $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2}$ ....

Solución:

a) Descomponemos $\dfrac{3n^2 - 5n + 1}{n!}$ en fracciones:

$$\frac{3n^2 - 5n + 1}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!} = \frac{A + Bn + Cn(n-1)}{n!} =$$

$$\left.\begin{aligned} C &= 3 \\ B-C &= -5 \\ A &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = 1; \quad B = -2; \quad C = 3;$$

Así tendríamos:

$$n = 1 \qquad \frac{3n^2 - 5n + 1}{n!} = \frac{-1}{1}$$

$$n = 2 \qquad \frac{3n^2 - 5n + 1}{n!} = \frac{3}{2}$$

$n = 3, 4, \ldots\ldots \quad \dfrac{3n^2 - 5n + 1}{n!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{2}{(n-1)!} + \dfrac{3}{(n-2)!}$

Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{n!} = -1 + \frac{3}{2} + \left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} +\right.$$

$$\left. + 3 \sum_{n=3} \frac{1}{(n-2)!}\right] = \frac{1}{2} + \left[e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - 2\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) +\right.$$

$$\left. + 3\left(e - \frac{1}{0!}\right)\right] = \frac{1}{2} + 2e - 1 - 1 - \frac{1}{2} + 2 + 2 - 3 = 2e - 1$$

b) Descomponemos en fracciones simples el termino general:

$$\frac{4n - 5}{(n-2)^2(n+1)} = \frac{A}{(n-2)^2} + \frac{B}{n-2} + \frac{C}{n+1} =$$

$$= \frac{A(n+1) + B(n-2)(n+1) + C(n-2)^2}{(n-2)^2\ (n+1)} =$$

$$\left.\begin{array}{l} B + C = 0 \\ A - B - 4C = 4 \\ A - 2B + 4C = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = B = 1; \quad C = -1;$$

Asi:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n - 5}{(n-2)^2(n+1)} = \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\pi^2 + 11}{6}$$

c) Para sumar esta vamos a calcular primero la suma de la serie:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} +$$

$$+ \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2} + \dots\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

Ahora:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

9.- Estudiar el carácter de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$

c) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} + \dots\dots$

Solución:

a) Es una serie alternada $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ Luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y además: -

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} = |a_{n-1}|$$

Luego según el Teorema de Leibnitz es convergente $\Sigma|a_n| = \frac{1}{n}$, Luego - no es absolutamente convergente, por tanto es condicionalmente conver - gente.

b) Es también una serie alternada:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 0$$

y, por otra parte:

$$|a_n| = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n-1}} = |a_{n-1}|$$

Luego también es convergente.

Estudiamos ahora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

Se tiene, aplicando el criterio de Reabe:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{-\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}} = 0 < 1$$

Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

es condicionalmente convergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} - \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

armónica con $\alpha > 1$ luego es convergente.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

> *10.- Hallar una reordenación de la serie:*
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$
>
> *de tal forma que converja hacia 1'1.*

Solución:

Es posible por no ser la serie absolutamente convergente.(Ejercicio 9).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Vamos tomando terminos positivos hasta superar a 1'1.

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} > 1'1.$$

Los terminos que tomaremos ahora seran los negativos necesarios para bajar de 1'1. $S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 1'1.$

Ahora terminos positivos para superar 1'1 de nuevo:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > 1'1$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} < 1'1.$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} > 1'1$$

y asi sucesivamente la reordenación es:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots$$

11.- Sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}$

Solución:

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha}}{2}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $\frac{e^{i\alpha}}{2}$ y $\left|\frac{e^{i\alpha}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ Luego converge y además:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{2^n} = \frac{\frac{e^{i\alpha}}{2}}{1 - \frac{e^{i\alpha}}{2}} = \frac{e^{i\alpha}}{2 - e^{i\alpha}}$$

Por otra parte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha + i\ \mathrm{sen}.n\alpha}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos.n.\alpha}{2^n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}.n.\alpha}{2^n}$$

Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos.n.\alpha}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\alpha}}{2 - e^{i\alpha}}\right)$$

$$\frac{e^{i\alpha}}{2 - e^{i\alpha}} = \frac{\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha}{(2-\cos\alpha) - i\,\mathrm{sen}\ \alpha} = \frac{(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)\left[(2-\cos\alpha) + i\ \mathrm{sen}\ \alpha\right]}{(2-\cos\alpha)^2 + \mathrm{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha - \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + i(2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{5 - 4\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha - 1}{5 - 4\cos\alpha} + i\,\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{5 - 4\cos\alpha}$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n} = \frac{2\cos\alpha - 1}{5 - 4\cos\alpha}.$$

12.- Demostrar que si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es una serie de terminos positivos convergente, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

también lo es. Análogamente si diverge.

Solución:

En efecto: Puesto que $a_n > 0$; $1 + a_n > 1$.

Luego:

$$\frac{a_n}{1 + a_n} < a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ por tanto converge.

Veamos ahora el caso en que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea divergente:

Si $(a_n)_{n=1}$ está acotada $\Rightarrow \exists M > 0 / 0 < a_n < M \Rightarrow 1 < 1 + a_n < 1 + M$

Luego:

$$\frac{a_n}{1 + a_n} > \frac{a_n}{1 + M} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} \geq \frac{1}{1 + M} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

divergente.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a_n}$ es divergente.

Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada $\Rightarrow K > 0 \;\; \exists N / \forall n > N$; $a_n > K$ y:

$$= \lim_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1 + a_n} = 1 \neq 0.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

13.- Estudiar el caracter de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n.e^{-n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.3....n}{x(x+1)...(x+n-1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \lg n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+4+8+...+2^n}{3^n}$

Solución:

a) convergente; b) convergente; c) $x > 2$ convergente
$x \leq 2$ divergente

d) divergente; e) convergente;

14.- Demostrar la formula de la suma de una serie hipergeométrica.

15.- Sumar si es posible, las series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{Ln}(1- \frac{1}{n^2})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{3^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + n - n^2}{(n + 1)!}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n + 3}{n^3 + n^2 - n -1}$

Solución:

a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\mathrm{Ln}2$ c) $\frac{9}{4}$ d) $2e-4$ e) $\frac{2\pi^2 + 21}{12}$

16.- Explicar la siguiente paradoja: (Euler).

$$S = 1-1 + 1-1 + 1 \ldots\ldots \Rightarrow \quad S = 1 - S \quad \Rightarrow \quad 2S = 1 \quad \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

17.- Dar un ejmplo de una serie alternada divergente y que el termino - general tienda a 0.

18.- Calcular la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

con un error menor que una milesima.

Solución:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{31}$$

19.- Hallar la suma de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}$

Solución:

a) $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{5 - 4\cos\alpha}$ b) $\frac{2i - 1}{5}$

20.- Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} an$; $a_n > 0$, diverge, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

también diverge.

21.- Demostrar que si la serie de terminos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} an$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. ¿Es cierto el resultado si Σa_n no es de - terminos postivos?

LECCION: 5

FUNCION REAL DE UNA VARIABLE REAL.

Definición: Una función real de una variable real, es toda aplicación, "f" de un subconjunto, A, de R en R.

Geometricamente, es una curva en el plano de coordenadas OXY, de tal forma, que toda recta vertical, corte en un solo punto a dicha curva.

Al conjunto A, se le denomina dominio de la función y se suele representar por D(f).

El recorrido o imagen de la función es el conjunto:

$$Imf = \{ y \in R \ / \text{ existe "x" de A, con: } f(x) = y \}.$$

En general, la función se suele escribir con la notación: $y = f(x)$.

Operaciones con funciones:

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, se definen:

FUNCION SUMA: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

FUNCION PRODUCTO: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.

FUNCION COMPUESTA: $(g\circ f)(x) = f(g(x))$.

FUNCION INVERSA DE "f": Es una función, h, tal que $h\circ f = f\circ h = i$, es decir, $f(h(x)) = h(f(x)) = x$. "h" se escribe: f^{-1}.

Para calcular f^{-1}, se procede del siguiente modo: Dada $y = f(x)$, se despeja, si es posible, x: $x = g(y)$. Se cambia "x" por "y": $y = g(x)$. Así, $g = f^{-1}$.

Propiedades:

- Las funciones con la operación "suma" es un grupo conmutativo.
- La composición de funciones es asociativa, tiene elemento neutro ($y = x$) y en general no tiene inverso ni es conmutativa.
- Si D(f) y D(g) son los dominios de "f" y "g" respectivamente, se tiene: $D(f + g) = D(f.g) = D(f) \cap D(g)$.

Límite de una función:

Sea "a" un punto de acumulación del dominio de "f". Se dice que existe el límite de f(x) cuando "x" tiende a "a", y se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ x \in D(f)$ y $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Límites laterales:

Se define límite de f(x) por la derecha, cuando x   a, y se escribe:

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L'$ si $\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0 \ /\ x > a \quad x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L'| < \varepsilon$

Análagamente, límite por la izquierda: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L''$ si:

$\forall \varepsilon > 0;\quad \exists \delta > 0 \ /\quad x < a \quad a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L''| < \varepsilon$

Proposición: Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, y solo si, existen $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y ambos coinciden. En tal caso, todos coinciden.

Propiedades de los límites:

a) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) . g(x)) = (\lim\limits_{x \to a} f(x)) . (\lim\limits_{x \to a} g(x))$

c) Si $\lim g(x) \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} (f(x))}{\lim\limits_{x \to a} (g(x))}$$

d) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo valor de "x" en un entorno de "a", y es: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, entonces: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

e) Si $\lim f(x) = L > 0$, existe un entorno $(a - \delta,\ a + \delta)$, tal que si $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \Rightarrow f(x) > 0$.

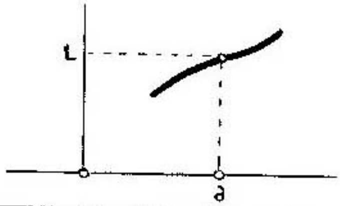
Función continua:

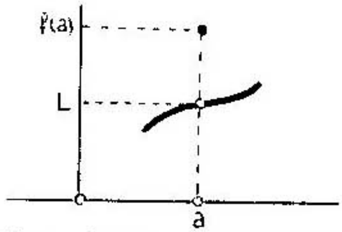
Se dice que f(x) es continua en "a" si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, existe f(a) y además: $f(a) = L$.

En caso contrario, diremos que la función presenta una discontinuidad en "a".

Tipos de discontinuidades:

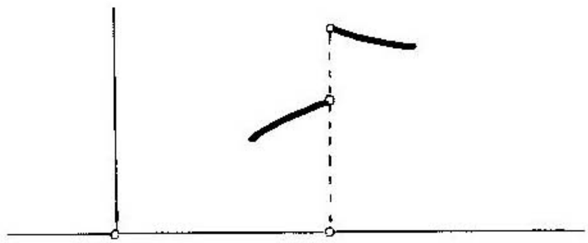
I) EVITABLE: Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, pero o bien no coincide con f(a), o bien no existe este valor.



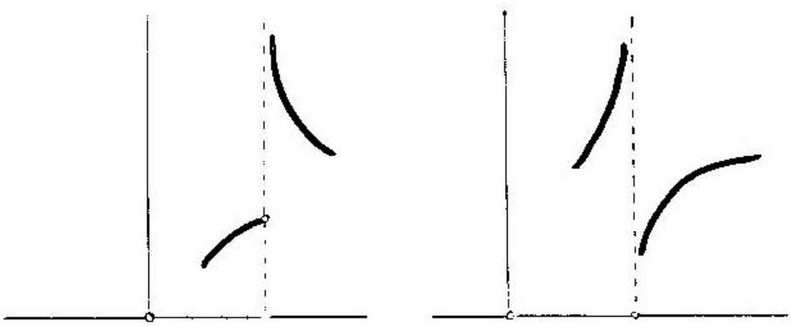


II) INEVITABLE DE PRIMERA ESPECIE:

Existen los límite laterales pero son distintos: Discontinuidad inevitable de Primera especie y de salto finito:

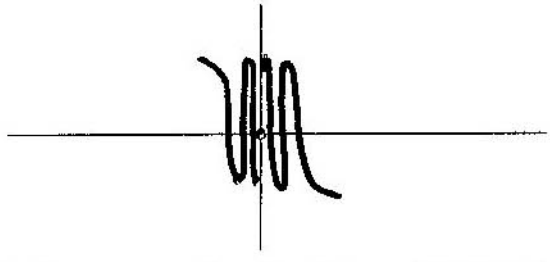


Uno de los límites laterales (o los dos) es infinito: Discontinuidad inevitable de Primera Especie de salto infinito:



III) INEVITABLE DE SEGUNDA ESPECIE:

El límite no existe y no es infinito:



Definición: Se dice que una función f(x) es continua en un subconjunto A de R, si lo es en cada punto de R.

Propiedades de **las funciones continuas:**

1.- Si "f" y "g" son continuas en "a", se verifica: f+g y f.g, tambien lo son. Si g(a) $\neq$ 0, tambien es continua $\frac{f(x)}{g(x)}$

2.- Si $\lim_{x \to a} g(x) = b$, y "f" es continua en "a", entonces se verifica:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

Corolario: Si "g" es continua en "a" y "f" lo es en g(a), entonces g f lo es en "a".

Teoremas sobre funciones continuas en intervalos cerrados:

1.- Toda función continua en $[a, b]$ está acotada. Es decir, si $f: [a, b] \longrightarrow R$ es continua, existe M tal que: $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

2.- Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza máximo y mínimo en él. Esto es: existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2); \quad \text{para todo } x \text{ de } [a, b].$$

3.- Sea f(x) continua en $[a, b]$ y tal que $sig(f(a)) \neq sig(f(b))$, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$. (teorema de Bolzano).

4.- Si f(x) es continua en $[a, b]$ y son "m" y "M" el mínimo y máximo de la función en $[a, b]$, entonces la función toma en el intervalo todos los valores entre m y M. Esto es, para todo $y_0 \in [m, M]$ existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Definición: Una función f(x) se dice uniformemente continua en $I \subset R$ si $\forall \varepsilon > 0$; existe $\delta > 0$, tal que si $x, x' \in I$ con $|x - x'| < \delta$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Proposicion: Toda función uniformemente continua en I es continua en I. (El reciproco no es cierto).

Teorema: Toda función continua en $[a, b]$ es uniformemente continua.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Hallar el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; *b)* $g(x) = Ln(x^2 - 1)$;

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; *d)* $k(x) = e^{-x^2}$

Solución:

a) $D(f) = \{ x \in R \ / \ \text{existe } \dfrac{x}{x^2 - 1} \} = R - \{-1, 1\}$.

b) Para que exista $g(x)$ es necesario que $x^2 - 1 > 0$; y eso ocurre cuando: $x > 1$ ó $x < -1$. Luego:

$$D(g) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

c) $D(h) = \{x \in R / \ x^2 - 3x + 2 > 0 \} = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

d) $D(k) = R$.

2.- Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -1 \\ x & si \quad -1 \leq x < 2 \\ x + 1 & si \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ x^3 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1-x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular: $f + g$ y $f.g$.

Solución:

Las funciones del ejercicio se pueden escribir tambien:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1-x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1-x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

.

Ahora, ya con los intervalos de las dos funciones "unificados obtendriamos directamente:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x + x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x + x^3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$(f.g)(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ x^4 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x - x^2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

3.- Sean las funciones: $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \frac{x}{x+2}$

Calcular: a) $f\circ g$; b) $g\circ f$; c) g^{-1}.

Solución:

a) $(f\circ g)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1 + 2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $(g\circ f)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{x+2}) = (\frac{x}{x+2})^2 - 1 = -\frac{4x + 4}{(x+2)^2}$

c) $y = \frac{x}{x+2}$; $\quad xy + 2y = x$; $\quad x(1 - y) = 2$; $\quad x = \frac{2}{1-y}$. Luego:

$$g^{-1}(x) = \frac{2}{1-x} .$$

4.- Demostrar:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{x^2+1} = 0$; $\qquad$ *b)* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x.\text{sen}x) = \frac{\pi}{2}$

Solución:

a) $|x^2 + 1| \geq 1$ para todo "x" real, entonces: Sea $\epsilon > 0$ y tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{4}$, así: $|x - 0| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{4x}{x^2+1} - 0 \right| = \left| \frac{4x}{x^2+1} \right| = \frac{|4x|}{|x^2+1|} < |4x| = 4|x| < 4\delta = 4\,\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Luego: $\varepsilon > 0$; existe $\delta > 0 / \ |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{4x}{x^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$

b) Sea $\varepsilon > 0$; y $\delta = \text{mín}\left(\frac{\varepsilon}{2} , \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \right)$. Llamando: $x = h + \frac{\pi}{2}$,

si $h < \delta$, se tiene:

$$|x.\text{sen}x - \tfrac{\pi}{2}| = |(h + \tfrac{\pi}{2}).\text{sen}(h + \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{\pi}{2}.\text{sen}\tfrac{\pi}{2}| =$$

$$|\tfrac{\pi}{2}(\text{sen}(h+\tfrac{\pi}{2}) - \text{sen}\tfrac{\pi}{2}) + h\text{sen}(h+\tfrac{\pi}{2})| < |\tfrac{\pi}{2}.2.\cos\frac{(h+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}{2}\text{sen}\frac{(h+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}{2}| +$$

$$+ |h|.|\text{sen}(h + \tfrac{\pi}{2})| < \pi.\cos(\tfrac{\pi}{2} + h).\text{sen}\tfrac{h}{2} + |h| < \pi.\text{sen}^2\tfrac{h}{2} + |h|$$

$$\pi.(\tfrac{h}{2})^2 + |h| < \pi.\frac{\frac{2\varepsilon}{\pi}}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{2x}}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} \right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{2x}} =$ (haciendo $x = 1/z$) $= \lim\limits_{z\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{z}\right)^{\frac{z}{2}} =$

$$= \left(\lim_{z\to\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{1/2} = \sqrt{e}.$$

d) Si "k" es positivo y suficientemente pequeño, se tiene:

$x < k$: $\text{sen}x < x < \text{tg}x \Rightarrow 1 < \dfrac{x}{\text{sen}x} < \dfrac{x}{\cos x} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}(1) > \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x = 1; = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

6.- Estudiar la continuidad de las funciones:

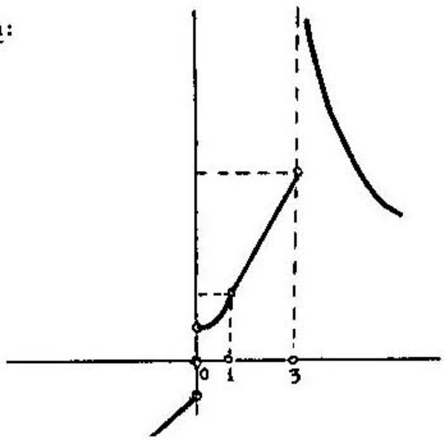
$$a)\ f(x) \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x \le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases} \qquad b)\ g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

$$c)\ h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \ \text{si } x \neq 0 \qquad d)\ k(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \ \text{si } x \neq 0$$

$$h(0) = 1 \qquad\qquad k(0) = 0.$$

Solución:

a)



En principio, por ser operaciones con funciones continuas, la función es continua para todo valor de "x" excepto $x = 0;\ x = 1;\ x = 3$. Veamos que ocurre en estos puntos:

Para a = 0: $f(0) = 0;\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x - 1) = -1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2 + 1) = 1$$

Luego en x = 0, hay una discontinuidad inevitable de Primera especie y de salto finito.

En a = 1: $f(1) = 2;\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 1) = 2.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x) = 2$$

Por lo tanto: $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$ y la función es continua.

En a = 3: $f(3) = 6;\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = 6;\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$. Por lo tanto en $x = 3$ hay una discontinuidad inevitable de Primera especie y de salto infinito.

Resumiendo: $f(x)$ es continua en $R - \{0, 3\}$

b) Si $x \neq 0$, la función no es continua. En efecto: supongamos que "a" es irracional, así $g(a) = 0$. Ahora bien, $a \neq 0 \Rightarrow |a| > \varepsilon > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces para todo $\delta > 0$, si $|x| < \delta \Rightarrow$

$$|g(x) - 0| = |g(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ |x| & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

Pero existe "a" con $|a| < \delta$ con "a" racional y es $|g(a) - 0| > \varepsilon$.

Análogamente se razonaria si a fuese racional.

Para $a = 0$ la función es continua pues:

$\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$ tal que si $|x| < \delta \Rightarrow |g(x) - 0| < |x| < \delta < \varepsilon$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$

c) $h(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ es continua en todo R. (Vease ejercicio 5).

d) $k(x)$ es continua para todo valor de $x \neq 0$ por ser operaciones con funciones continuas.

$\lim\limits_{x \to 0} k(x) = 0$, pues: $|x^2 \text{sen}\frac{1}{x}| \leq |x|^2 \leq |x|$. Por lo tanto la función también es continua para $x = 0$.

7.- Sea f: $[0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demostrar que existe un $x_0 \in [0, 1]$, tal que $f(x_0) = x_0$.

Solución:

Sea $g(x) = x - f(x)$. $g(x)$ es una función continua en $[0, 1]$.

Puede suceder que $g(0) = 0$ o $g(1) = 0$, en cualquiera de los dos casos ya estaria demostrado lo que se queria. Por lo tanto, veamos que ocurre si $g(0) \neq 0$ y $g(1) \neq 0$.

Será: $g(0) = - f(0) < 0$; $g(1) = 1 - f(1) > 0$. Así tenemos que $g(x)$ es continua y toma valores con signos cambiados en los extremos del intervalo $[0, 1]$, luego aplicando el teorema de Bolzano:

Existe $x_o \in [0, 1]$ tal que $g(x_o) = 0$, es decir: $f(x_o) - x_o = 0 \Rightarrow$

$$f(x_o) = x_o .$$

8.- ¿Tiene solución la ecuación $\cos x = x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$?.

Solución:

La respuesta es SI, pues si tomamos la función: $f(x) = x - \cos x$, resulta ser continua en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y es $f(0) = -1$; $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto, aplicando el teorema de Bolzano, existe $x_o \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que:

$$f(x_o) = x_o - \cos x_o = 0 \quad \Rightarrow \quad x_o = \cos x_o .$$

9.- Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Demostrar que el máximo de la función en $[a, b]$ es $f(a)$, $f(b)$ o un máximo relativo.

NOTA: $f(x_o)$ se dice que es un máximo relativo de la función $f(x)$, si existe un entorno de x_o $(x_o-\delta, x_o+\delta)$, tal que si $x \in (x_o-\delta, x_o+\delta)$, es $f(x) < f(x_o)$.

Solución:

$f(x)$ es continua en $[a, b]$ luego alcanza máximo en el intervalo, po. lo tanto, existe un $x_o \in [a, b]$ tal que $f(x_o) = \text{máx } \{f(x);\ x \in [a, b]\}$

Si x_o no es "a" ni "b", entonces: $x_o \in (a, b) \Rightarrow$ Para todo $x \in (a, b)$ es $f(x) \leq f(x_o) \Rightarrow$ Para todo $\delta > 0$ con $(x_o-\delta, x_o+\delta) \subset (a,b)$ se tendrá: $x \in (x_o-\delta, x_o+\delta)$ es $f(x) \leq f(x_o)$. Por lo tanto $f(x_o)$ es un máximo relativo de la función.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

10.- Hallar el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 - x - 3}$; b) $g(x) = Ln \frac{x^2}{x + 1}$

Solución: $D(f) = [-3, -1] \cup [1, \infty)$; $D(g) = (-1, \infty) - \{0\}$

11.- Calcular $f \circ g$ y f^{-1}, siendo:

$f(x) = x^2 - 3x + 2$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

Solución: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$; $f^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$

12.- Demostrar, usando la definición que:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x^2 + 1} = 1$; b) $\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = 1$

13.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x^4 - 5x^3 - 2x}$ b) $\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\frac{1}{x^2 - 1}}$ c) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Solución: a) -1/2; b) 1/e; c) 1/2.

14.- Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Q \\ 1 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{x^2 - 9x + 20} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

c) $h(x) = e^{1/x}$

Solución: a) Discontinua en todo R. b) 0: discontinuidad evitable. 4, 5 discontinuidades inevitables. c) Discontinua en "0".

15.- Estudiar crecimiento y decrecimiento de la función: $f(x) = x^2 - \cos x$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación: $x^2 = \cos x$?.

Solución. Dos soluciones.

16.- Aproximar hasta las centesimas alguna solución real de la ecuación: $x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$.

Solución: 2,41; 0,41.

17.- Demostrar que existen funciones continuas y no uniformemente continuas.

LECCION. 6

DERIVADA DE UNA FUNCION DE UNA VARIABLE REAL. TEOREMAS SOBRE DERIVADAS.

Definición. 1. Se dice que una función $y = f(x)$ es derivable en x_0, si existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A dicho límite se le denomina derivada de la función $f(x)$, en x_0, y se representa por $f'(x_0)$.

Propiedades.

a) Si $f(x)$ es derivable en x_0 ; $f(x)$ es continua en x_0.

b) Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en "x_0" ; $(f + g)(x)$ es derivable en "x_0" y además:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

c) Si $f(x)$ es derivable en x_0 y $a \in R$, $af(x)$ es derivable en "x_0" y :

$$(a.f)'(x_0) = a \,.\, f'(x_0)$$

d) Sea $u = g(x)$ e $y = f(u)$. Si "g" es derivable en x_0 , y "f" es derivable en $g(x_0)$, $f[g(x)]$ es derivable en x_0 y es:

$$(g \circ f)'(x_0) = [f'[g(x_0)]].g'(x_0)$$

(Regla de la cadena)

e) Sea $y = f(x)$ con $f'(x_0) \neq 0$. Entonces es posible despejar $x = g(y)$ en un entorno de x_0 , de tal forma que $f[g(y)] = y$. Además si:

$$y_0 = f(x_0)$$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

f) Si llamamos $h = \Delta x$, y $f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta y$ se tiene:

$$\Delta y = f'(x_0) . \Delta x + \xi . \Delta x \quad \text{con } \xi \to 0 \ ; \ \text{si } \Delta x \to 0 \quad .$$

Definición 2. Sea "f" una función definida en $[a,b]$. Si para todo:

$$x_0 \in (a,b)$$

existe $f'(x_0)$, es posible definir la función:

$$f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f'(x)$$

A dicha función se le denomina función derivada de la función $f(x)$ y se escribe: $\quad y' = f'(x)$

A la derivada de una función en un punto se la denomina también pendiente de la curva en dicho punto.

Definición 3. Se llama recta tangente a una curva en un punto de ella, a la recta que pasando por dicho punto tiene de pendiente la de la curva.

Es decir: Si $y = f(x)$ es derivable en x_0, y es $y_0 = f(x_0)$:

Recta tangente: $\quad y - y_0 = f'(x_0) . [x - x_0]$

Se define la normal a dicha curva a la recta:

$$y - y_0 = - \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) \quad \text{si } f'(x_0) \neq 0$$

Definición 4.

Derivadas laterales. Se dice que una función $f(x)$, es derivable en x_0 por la izquierda si existe:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y tal limite se denota por $f'(x_0^-)$.

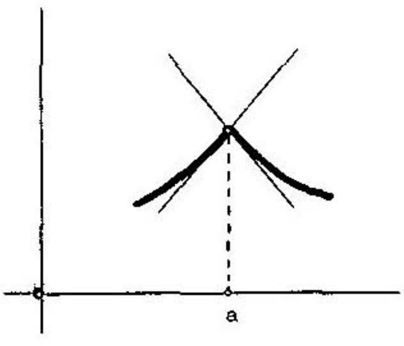
Analogamente por la derecha:

$$f'(x_0+) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

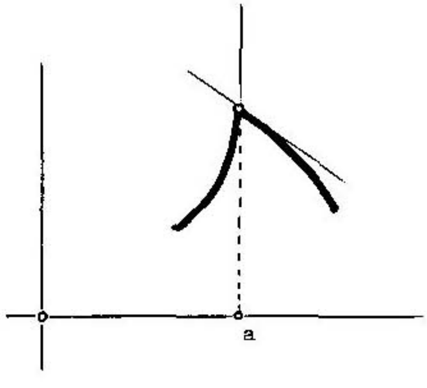
Consecuencia: $f(x)$ es derivable en x_0 si, y solo si, es derivable por la derecha y por la izquierda y además:

$$f'(x_0 +) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$$

Ej 1.- Función con derivadas laterales en "a" y no derivable en dicho punto.



Ej 2.- Función sin una de las derivadas laterales en "a".



DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES:

$y = C$	$y' = 0$	$y = u(x) + v(x) - w(x)$	$y' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$
$y = a \cdot f(x)$	$y' = a \cdot f'(x)$	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}$	$y = f(u)$ $u = g(x)$	$y' = f'(u) \cdot u'(x)$
$y = f(x)$	$y' = \frac{1}{g'(y)}$ siendo $x = g(y)$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = lg_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = sen\, x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\,sen\, x$	$y = tg\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$y = co\,tg\, x$	$y' = -\frac{1}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$	$y = sh\, x$	$y' = ch\, x$
$y = ch\, x$	$y' = shx$	$y = th\, x$	$y' = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$
$y = co\,tg\,h\, x$	$y' = \frac{1}{sh^2 x} = \cot h^2 x - 1$	$y = ar\,sen\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = ar\,cos\, x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = ar\,tg\, x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = ar\,co\,tg\, x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$	$y = Arg\,sh\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$y = Arg\,th\, x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$	$y = Arg\,co\,th\, x$	$y' = \frac{1}{x^2 - 1}$

TEOREMAS SOBRE DERIVADAS:

1.- Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $f(a) = f(b)$ existe un punto x_0 de (a,b) tal que $f'(x_0) = 0$.

2.- Teorema de los incrementos finitos. (de Lagrange)

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) existe un punto:

$$x_0 \in (a,b)$$

tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Geometricamente: hay un punto $(x_0, f(x_0))$ de la curva en el cual la tan gente es paralela a la cuerda que une $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$.

3. Teorema de Cauchy.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), tales que $g(a) \neq g(b)$. Existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Diferencial. Sea $y = f(x)$, una función derivable.

Se define como diferencial de dicha función y se denota por "dy" a:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

En particular si $y = x$; $dx = \Delta x$.

Luego:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Por esta razón se suele denotar también:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Aplicando la definición obtener las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$; b) $g(x) = Ln(x+1)$ en $x = 0$

Solución:

a) $$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h+1} - \sqrt{3+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h\to 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4}$$

b) $$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{Ln(h+1) - Ln\ 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} Ln\ (1+h) =$$

$$= \lim_{h\to 0} Ln\ (1+h)^{1/h} = Ln\ (\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h}) = Ln\ e = 1$$

2.- Estudiar la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x) = x^n \cdot sen \frac{1}{x}$; $n \in N$ *b)* $g(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$

$f(0) = 0$ $g(0) = 0$

c) $h(x) = \begin{cases} mx + n & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \quad\ \ x > 1 \end{cases}$

Solución:

a) Si $n = 0$ $f(x) = sen \frac{1}{x}$

$f(0) = 0$

y $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, por tanto f(x) no es continua, luego no es derivable.

Para : $n = 1$ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x.\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0 = f(0).$

Pues:

$$|x.\ \text{sen}\,\frac{1}{x}| \leq |x| \quad \forall\, x \in R$$

Así:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ;\quad \exists\, \delta = \varepsilon \ /\ |x| < \varepsilon; |x.\ \text{sen}\,\frac{1}{x}| < \varepsilon\ .$$

Luego:

$$f(x) = x.\ \text{sen}\,\frac{1}{x} \quad \text{es continua.}$$

Veamos si es derivable, para ello tenemos que estudiar si existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h.\ \text{sen}\,\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \text{sen}\,\frac{1}{h}$$

que no existe.

Por lo tanto para n = 1 f(x) es continua y no derivable.

Si $n \geq 2$: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^n.\ \text{sen}\,\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

Así , f(x) es continua.

Por otro lado:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^n.\ \text{sen}\,\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h^{n-1}.\ \text{sen}\,\frac{1}{h} = 0$$

Luego es derivable.

Resumiendo: $n = 0$ f(x) no es continua.

$n = 1$ f(x) es continua y no derivable.

$n \geq 2$ f(x) es derivable.

Nota:

Observese que el estudio de f(x) lo hemos hecho solo en x = 0, la - razón es que si $x \neq 0$; $\frac{1}{x}$ es derivable y por tanto sen $\frac{1}{x}$ también lo es por ser la compuesta de dos derivables. Por último x^n.sen $\frac{1}{x}$ lo es también por ser producto de dos funciones derivables.

b) Por razones análogas al anterior estudiamos la derivabilidad en x = 0.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{1/x}} = 0 = g(0)$$

Pues:

$$1 + e^{1/x} > 1 \neq 0 \quad \forall x \in R$$

Luego "g" es continua en cero.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+e^{1/h}}$$

Ahora bien:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/h}} = 0 \qquad \text{pues} \qquad \lim_{h\to 0^+} e^{1/h} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/h}} = 1 \qquad \text{pues} \qquad \lim_{h\to 0^-} e^{1/h} = 0$$

Luego al no existir $\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ "g" no es derivable en x = 0

c) Estudiamos que ocurre en x = 1 pues en el resto de los puntos h(x) es derivable.

Para que h(x) sea derivable en x = 1 es necesario, en primer lugar - que sea continua:

$$\lim_{h\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) \Rightarrow m + n = 3$$

Para estudiar la derivabilidad:

$$h'(1^-) = \lim_{\substack{k\to 0\\ k<0}} \frac{h(1+k)-h(1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{m(1+k)+n-(m+n)}{k} = m$$

$$h'(1^+) = \lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} \frac{h(1+k)-h(1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{(1+k)^2+2-(m+n)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1+2k+k^2+2-(m+n)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{3+2k+k^2-3}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} (2+k) = 2$$

Si "h" es derivable en $x = 1$, $h'(1^-) = h'(1^+)$ $m = 2$

Luego para que "h" sea derivable ha de verificarse:

$$\left.\begin{array}{r} m+n=3 \\ m=2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n=1 \\ m=2 \end{array}$$

Así $h(x)$ es derivable para todo "x" si $m = 2$ y $n = 1$, en los restantes casos "h" es derivable para todo valor de "x" excepto para $x = 1$.

3.- Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = ar\ tg \dfrac{1+x}{1-x}$; *b)* $y = x^x$ *c)* $y = sen \dfrac{1}{sen \dfrac{1}{sen\ x}}$

d) $y = e^{x^2} . \ Ln\ x.$ *e)* $f(x) \begin{cases} x^3 - 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Nota. Nos planteamos solamente el uso de las reglas de derivación y no entramos en la derivabilidad. Es decir se trata de calcular la función derivada caso de que exista.

Solución.

a) $y = ar\ tg\ u$ donde $u = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$y' = \frac{1}{1+u^2} . u' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} . \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} =$$

$$= \frac{2}{2 + 2x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Resultado que no debe sorprendernos ya que:

$$y = \text{ar tg}\,\frac{1 + x}{1 - x} \Rightarrow \text{tg } y = \frac{1 + x}{1 - x} \Rightarrow (1 - x)\text{ tg } y = 1 + x \Rightarrow$$

$$x(1 + \text{tg } y) = \text{tg } y - 1 \Rightarrow x = \frac{\text{tg } y - 1}{1 + \text{tg } y} = \frac{\text{tg } y - \text{tg}\,\frac{\pi}{4}}{1 + \text{tg}\,\frac{\pi}{4}\text{tg } y} = \text{tg}(y - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$y - \frac{\pi}{4} = \text{ar tg } x \Rightarrow y = \text{ar tg } x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

b) $y = x^x$; $\text{Ln}y = x.\text{Ln } x$

Luego:

$$\frac{y'}{y} = \text{Ln } x + x.\,\frac{1}{x} = \text{Ln } x + 1 \qquad y' = x^x(\text{Ln } x + 1)$$

c) $y = \text{sen}\,\dfrac{1}{\text{sen}\,\dfrac{1}{\text{sen } x}}$ Si: $u = \dfrac{1}{\text{sen } x}$; $v = \text{sen } u$; $w = \dfrac{1}{v}$

se tiene:

$$y = \text{sen } w = \text{sen}\,\frac{1}{v} = \text{sen}\,\frac{1}{\text{sen } u} = \text{sen}\,\frac{1}{\text{sen}\,\frac{1}{\text{sen } x}}$$

Así:

$$y' = \cos w.\ w'$$

$$w' = -\frac{1}{v^2}\ .\ v'$$

$$v' = \cos u.\ u'$$

$$u' = \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

Por lo tanto:

$$y' = \cos w.\ (-\frac{1}{v^2}\ .\ \cos u\ .\ \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}) =$$

$$= \cos\frac{1}{\text{sen}\,\frac{1}{\text{sen } x}}\ .\ \frac{\cos\frac{1}{\text{sen } x}\ .\ \cos x}{\text{sen}^2\,\frac{1}{\text{sen } x}\ .\ \text{sen}^2 x}$$

d) $y = e^{x^2} \cdot \text{Ln}\, x \qquad y = e^u \qquad \text{con } u = x^2 \cdot \text{Ln}\, x$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{x^2 \cdot \text{Ln}\, x}(2x\ \text{Ln} x + x^2 \frac{1}{x}) = (2x\ \text{Ln}\, x + x) \cdot e^{x^2 \cdot \text{Ln} x}$$

e) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

en $x = 0$ $f(x)$ no es derivable.

4.- Demostrar que las normales a la circunferencia:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

pasan por el centro de dicha circunferencia.

Solución:

Sea (x_1, y_1) un punto de dicha circunferencia.

La normal a esta en (x_1, y_1) es: $\qquad y - y_1 = -\frac{1}{y'_1}(x - x_1)$

siendo y'_1 la derivada de "y" para $x = x_1$.

Calculemosla:

$$2(x - a) + 2(y - b)y' = 0 \qquad y' = -\frac{x - a}{y - b}$$

$$y'_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b} \Rightarrow -\frac{1}{y'_1} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$$

Por lo tanto la normal es:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}(x - x_1)$$

Veamos que pasa por el punto (a,b): La damos a "x" el valor de "a" y nos queda:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}(a - x_1) = b - y_1 \Rightarrow y = b \qquad \text{c.q.d.}$$

5.- Las funciones siguientes no cumplen el teorema de Rolle en los intervalos que se indican. ¿Por qué?.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *en* $[-1,1]$; *b)* $g(x) = |x|$ *en* $[-1,1]$

c) $h(x) = x^3$ *en* $[-1,1]$

Solución:

a) $f(x)$ no es continua en $x = 0$

b) $g(x)$ es continua en $[-1,1]$ $g(-1) = g(1) = 1$ pero no es derivable en $x = 0$

c) $h(x)$ no lo cumple pues $h(-1) = -1 \neq h(1) = 1$

6.- Demostrar que el error que se comete al tomar como valor de $\sqrt[3]{1,03}$ *"1" es menor que una centesima.*

Solución:

Sea la función $y = \sqrt[3]{x}$ es continua en $[1;\ 1,03]$ y derivable en $(1;1,03)$. Luego según el teorema de los incrementos finitos:

$$\frac{f(1,03) - f(1)}{1,03 - 1} = f'(\xi) \qquad \xi \in (1;1,03)$$

$$\frac{\sqrt[3]{1,03} - 1}{0,03} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} \qquad \text{con} \qquad \xi \in (1;1,03)$$

Pero:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}$$

Luego:

$$\sqrt[3]{1,03} - 1 < 0,03 \cdot \frac{1}{3} = 0,01$$

que era lo que nos pedían.

7.- *Cuestiones:*

a) ¿Existen dos funciones distintas tales que tengan la misma derivada?

b) Escribir, si existe, una función continua para todo valor de "x" y que no sea derivable en tres puntos exactamente.

c) Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que si $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$; es $f(a)=f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(b)$

Demostrar que existen al menos cuatro puntos de (a,b) donde la derivada se anula.

Solución:

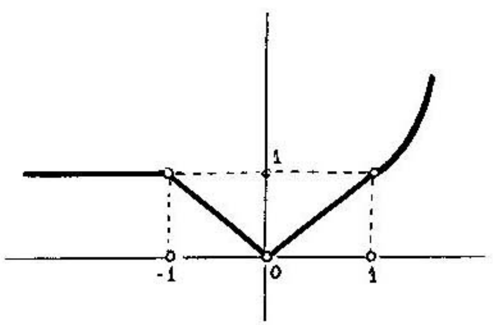
a) La respuesta es que si. Basta tomar dos funciones que se diferencien en constantes:

$$y = f(x) \;; \qquad y = f(x) + C \quad \text{con } C \neq 0$$

b) Si existe. Por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es continua y no derivable en -1; 0; 1.



c) La demostración es inmediata aplicando el teorema de Rolle en $[a_1, x_1]$ $[x_1, x_2]$; $[x_2, x_3]$; $[x_3, b]$.

8.- Calcular las diferenciales de las funciones:

a) $y = x^5$; b) $y = u(x).v(x)$; c) $y = Ln\ x$.

<u>Solución:</u>

a) $y = x^5$; $y' = 5x^4dx$.

b) $y = u(x).\ v(x)$

$$y' = [u'(x).v(x) + u(x).v'(x)]dx = (u'(x).dx)v(x)+u(x)+(v'(x)\ dx) =$$

$$= vdu + udv$$

c) $y = Ln\ x$ $\qquad y' = \frac{1}{x}\ .dx = \frac{dx}{x}$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

9.- Calcular, aplicando la definición, las derivadas de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

a) $y = x^3$ en $x = 2$; b) $y = e^x$ en $x = 0$; c) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \frac{\pi}{2}$

Solución:

a) $y' = 12$; b) $y' = 1$; c) $y' = 0$

10.- Estudiar la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{1 + e^{1/x}}$ con $g(0) = 0$

Solución:

a) Es derivable si $a = 0$ $b = 1$; b) Es derivable.

11.- Apliquese las reglas de derivación para calcular las derivadas de las funciones siguientes.

a) $y = x^{\operatorname{sen} x}$; b) $y = \operatorname{ar\,tg} \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$; c) $y = \operatorname{th}(e^{x^x})$

Solución:

a) $y' = x^{\operatorname{sen} x} (\cos x. \operatorname{Ln} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x})$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}\ \sqrt{1 + x}}$ c) $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 e^{x^x}} . e^{x^x} . x^x (\operatorname{Ln} x + 1)$

12.- Calcular el angulo de corte de las curvas:

$y = xe^x$ e $y = x^2 e^x$

Solución:

Las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$

En $x = 0$ con un angulo de $\frac{\pi}{4}$

En $x = 1$ con un angulo de $\text{ar tg } \frac{e}{1 + 6 \cdot e}$

13.- Acotar el error que se comete al tomar como valor de Ln(1,2):0.

Solución: 0,2

14.- a) ¿Existen funciones continuas en todo R y no derivable en infinitos puntos?.

b) Encontrar la derivada "n-sima" de la función $y = \text{Ln}(1 + x)$.

c) Demostrar que la función:

$$y = Ax^2 e^x + Bxe^x + Ce^x$$

verifica la ecuación:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Solución:

a) Si ; b) $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1 + x)^n}$

LECCION. 7

APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Regla de L'Hopital.

Si f(x) y g(x) son dos funciones continuas y derivables en un entorno reducido de "x_0" y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla también es aplicable a las indeterminaciones:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm \infty \ ; \ \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm \infty$$

incluso cuando $x_0 = \infty$.

Con sencillas transformaciones se puede aplicar al resto de limites indeterminados.

Teorema de Taylor.

Sea f(x) una función derivable hasta el orden "n" en un entorno - del punto "a". Se tiene:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n$$

siendo x_0 un punto perteneciente al intervalo (a,x) o (x,a) según:

$$a < x \quad ó \quad a > x$$

Si a = 0. La formula se denomina de Mac-Laurin

Infinitesimos:

Se dice que $f(x)$ es un infinitesimo para $x \to a$, si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Dos infinitesimos $f(x)$, $g(x)$ para $x \to a$, se dicen equivalentes si:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Se usan infinitesimos de la forma siguiente:

Si $f(x)$ es un infinitesimo equivalente a $g(x)$ para $x \to a$, (se escribe

$f(x) \underset{x \to a}{\simeq} g(x)$).

$$\lim_{x \to a} f(x).h(x) = \lim_{x \to a} g(x).h(x)$$

Es decir un infinitesimo "sustituye" a otro en el cálculo de limi - tes.

Es útil la siguiente tabla de infinitesimos equivalentes:

$\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{\simeq} x$	$1 - \cos x \underset{x \to 0}{\simeq} \frac{x^2}{2}$	$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\simeq} x$
$\operatorname{ar\,sen} x \underset{x \to 0}{\simeq} x$	$\operatorname{tg} x \underset{x \to 0}{\simeq} x$	$\sqrt[x]{a} - 1 \underset{x \to \infty}{\simeq} \frac{1}{x} \operatorname{Ln} a$
$a^x - 1 \underset{x \to 0}{\simeq} x \operatorname{Ln} a$	$\operatorname{Ln}(1 + x) \underset{x \to 0}{\simeq} x$	$\operatorname{sh} x \underset{x \to 0}{\simeq} x$
$\operatorname{Ln} x \underset{x \to 1}{\simeq} x-1$	$\operatorname{ch} x \underset{x \to 0}{\simeq} \frac{1}{2} x^2 + 1$	

Crecimiento y decrecimiento.

Si $f(x)$ es derivable en un entorno de "x_0" y es:

$$f'(x_0)\left\{\begin{matrix} > 0 \\ \\ < 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow f(x) \text{ es } \left\{\begin{matrix} \text{creciente} \\ \\ \text{decreciente} \end{matrix}\right\} \text{ en } x_0.$$

Concavidad y convexidad.

Una curva se dice concava en "x_0" si en un entorno de "x_0" la ordenada de la tangente a dicha curva es mayor a la ordenada de la curva.Si es menor se dice convexa.

Se dice que presenta en "x_0" un punto de inflexión si en un entorno $(x_0 - h, x_0 + h)$ ocurre lo siguiente.

Sea $0 < k < h$, y sean $t(x_0 + k)$, $f(x_0 + k)$ las ordenadas de la tangente a la curva en "x_0" y la curva en el punto $(x_0 + k)$.

Entonces, "x_0" es un punto de inflexión si :

$$\text{signo } (t(x_0 + k) - f(x_0 + k)) \neq \text{ signo } (t(x_0 - k) - f(x_0 - k)).$$

Estudio del comportamiento de una función en el punto "x_0".

Sea $f(x)$ una función derivable en "x_0" y calculemos su derivada:

si $f'(x_0) \neq 0$ la función, es creciente o decreciente según dijimos antes.

Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y es $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Se tiene:

Si "n" es par y
- $f^{(n)}(x_0) > 0$ — $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo relativo de la función.
- $f^{(n)}(x_0) < 0$ — $(x_0, f(x_0))$ es un máximo relativo de la función.

Si "n" es impar: "x_0" es un punto de inflexión de tangente horizontal.

Si: $f'(x_0) \neq 0$, y es $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

Con: $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Si "n" es impar $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de tangente no horizontal.

Si "n" es par y es $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)) > 0 & \text{La función es concava en } (x_0 f(x_0)) \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & \text{La función es convexa en } (x_0 f(x_0)) \end{cases}$

Nota.

El estudio de los máximos y mínimos se hace muchas veces a través de la misma función ó de la derivada primera.

Si en "x_0" es $f'(x_0) = 0$, y existe un entorno de "x_0":

$$(x_0 - h \ , \ x_0 + h)$$

tal que si:

$$x \in (x_0 - h, x_0 + h) \quad \text{es} \quad f(x) \lesseqgtr f(x_0)$$

La función tiene un $\begin{cases}\text{mínimo}\\ \text{máximo}\end{cases}$, en "$x_0$".

Si: $0 < k < h$ y es $f(x_0 - k) < f(x_0) < f(x_0 + k)$ ó

$f(x_0 - k) > f(x_0) > f(x_0 + k)$ entonces $(x_0, f(x_0))$

es un punto de inflexión.

El estudio a través de la derivada se hace estudiando el signo de esta

Si $f'(x_0) = 0$; y es el signo de $f'(x)$ es negativo a la izquierda de "x_0" y positivo a la derecha:

$$(x_0, f(x_0))$$

es un mínimo.

Si la variación del signo es al contrario es un máximo y si no existe variación de signo es un punto de inflexión.

Construcción de curvas en explicitas.

Para representar graficamente funciones, $y = f(x)$, se calculan en general los siguientes elementos, aunque no simepre son necesarios todos.

a) Dominio = $\{x \,/\, f(x) \text{ existe}\}$.

b) Campo de variación de la función. Consiste en estudiar, en función de "x", que valores toma "y" .

c) Puntos de corte con los ejes:

Eje OX : Se resuelve la ecuación $f(x) = 0$

Eje OY : Son los valores de $f(0)$.

d) Asintotas. Son rectas a las cuales se apróximan indefinidamente la curva en alguna de sus ramas. Se calculan:

Asintotas horizontales:

$$y = k \; ; \text{ siendo } \quad k = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Asintotas verticales:

$$x = h$$

siendo los valores para los cuales:

$$\lim_{x \to h} f(x) = \infty$$

Asintotas oblicuas: $\qquad y = mx + n$, donde:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \qquad n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

e) Regiones de crecimiento y decrecimiento. Se hace estudiando la variación del signo de la derivada.

f) Máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad-convexidad. Que ya lo hemos hecho anteriormente.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $a, b > 0$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\cot g x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^-}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$; d) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 e^{-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\operatorname{tg} \dfrac{3x}{2}\right)^{x-\pi}$

Solución:

Los hacemos todos aplicando la regla de L'Hopital:

a) Es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-a \operatorname{sen} ax}{\cos ax}}{\dfrac{-b \operatorname{sen} bx}{\cos bx}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a \operatorname{sen} ax.\ \cos bx}{b \cos ax.\ \operatorname{sen} bx} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{a^2 \cos ax \cos bx - ab \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx}{-ab \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx + b^2 \cos ax \cos bx} = \frac{a^2}{b^2}$$

b) De la forma 1^∞ .

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{co\,tg} x.\ \ln(\cos x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x.\ \ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}x.\ \ln(\cos x) + \cos x \dfrac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}x \ln(\cos x) - \operatorname{sen}x}{\cos x} = 0$$

Luego:

$$A = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\cot g x} = 1$$

c) Se trata de una indeterminación de la forma: $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to \pi/2^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \pi/2^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

d) $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^2}$ es de la forma $\infty \cdot 0$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

e) $A = \lim_{x \to \pi^+} \left(\operatorname{tg} \frac{3x}{2}\right)^{x-\pi}$ es una indeterminación de la forma ∞^0.

$$\operatorname{Ln} A = \lim_{x \to \pi^+} (x - \pi) \operatorname{Ln} \operatorname{tg} \frac{3x}{2} = \lim_{x \to \pi^+} \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{\frac{1}{x-\pi}} =$$

$$= \lim_{x \to \pi^+} \frac{\frac{\frac{3}{2}}{2\cos^2 \frac{3x}{2} \, \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}}{-\frac{1}{(x-\pi)^2}} = -\lim_{x \to \pi^+} \frac{3(x-\pi)^2}{2 \cdot 2\cos^2 \frac{3x}{2} \, \operatorname{tg} \frac{3x}{2}} = -\lim_{x \to \pi^+} \frac{3(x-\pi)^2}{2\cos \frac{3x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x}{2}}$$

$$= -\lim_{x \to \pi^+} \frac{3(x-\pi)^2}{\operatorname{sen} 3x} = -\lim_{x \to \pi^+} \frac{6(x-\pi)}{3\cos 3x} = 0.$$

Luego: $A = e^0 = 1$.

2.- Demostrar que son equivalentes los infinitésimos siguientes:

a) $\operatorname{tg} x \simeq e^x - 1 \quad (x \to 0)$ *b)* $e^{\operatorname{sen} x} - 1 \simeq x \quad (x \to 0)$

Solución:

a) Veamos que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{e^x - 1} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{e^x} = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\text{senx}} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \; e^{\text{senx}}}{1} = 1$$

3.- Usando el teorema de Taylor hallar una función polinómica que sea un infinitesimo equivalente a 1-cosx + Ln(cosx) para x $\longrightarrow$ 0.

Solución:

Sea la función $f(x) = 1 - \cos x + \text{Ln}(\cos x)$ y calculemos su desarrollo en series de Taylor:

$$f(x) = 1 - \cos x + \text{Ln}(\cos x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \text{senx} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\text{senx} - \frac{2 \text{ senx}}{\cos^3 x} \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = -\cos x - \frac{2\cos^2 x + 3\text{senx}}{\cos^4 x} \qquad f^{IV}(0) = -1-2 = -3$$

Luego:

$$1 - \cos x + \text{Ln}(\cos x) \underset{x \to 0}{\simeq} -\frac{3}{4!} x^4 = \frac{-x^4}{8}$$

4.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\text{artg}\,\dfrac{x}{2}}{\cos x(\text{sen}x)^2}$; *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a^x-1)\,\text{Ln}(1-x^2)}{[(1-x^2)^m-1]\,\text{arcsen}x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos 3x}{\text{tg}^3\, 5x}$

Solución:

a) $\text{artg}\,\dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\simeq} \dfrac{x}{2}$ $\quad \text{sen}x \underset{x\to 0}{\simeq} x$ $\quad$ Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x.\text{artg}\,\frac{x}{2}}{\cos x(\text{sen}x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x.\frac{x}{2}}{\cos x.x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2.\cos x} = \frac{1}{2}$$

b) $a^x - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} x.\text{Lna}$; $\quad \text{arsen}x \underset{x\to 0}{\simeq} x$ $\quad$; $\text{Ln}(1-x^2)^m \underset{x\to 0}{\simeq} (1-x^2)^m-1$

Luego:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a^x-1)\quad \text{Ln}(1-x^2)}{[(1-x^2)^m-1]\text{arc sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.\,\text{Lna}.\,\text{Ln}(1-x^2)}{\text{Ln}(1-x^2)^m.x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{Lna}.\text{Ln}(1-x^2)}{m.\text{Ln}(1-x^2)} = \frac{\text{Ln a}}{m}$$

c) $1 - \cos 3x \underset{x\to 0}{\simeq} \dfrac{1}{2}\,.\,(3x)^2$ $\quad \text{tg}\,5x \underset{x\to 0}{\simeq} 5x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x.\cos 3x}{\text{tg}^3\, 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos 3x)}{\text{tg}^3\, 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.\,\frac{1}{2}\,9x^2}{5^3\,.\,x^3} =$$

$$= \frac{9}{250}$$

5.- *Desarrollar en potencia de $x - 2$ el polinomio:*

$$P_4(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 3$$

Solución:

$$P_4(2) = 2^4 + 3\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 + 2 + 3 = 53$$

$P'_4(x) = 4x^3 + 9x^2 + 4x + 1$ $\qquad$ $P'_4(2) = 4.2^3 + 9.2^2 + 4.2 + 1 = 77$

$P''_4(x) = 12x^2 + 18x + 4$ $\qquad$ $P''_4(2) = 12.4 + 18.2 + 4 = 88$

$P'''_4(x) = 24x + 18$ $\qquad$ $P'''_4(2) = 24.2 + 18 = 66$

$P^{IV}_4(x) = 24$ $\qquad$ $P^{IV}_4(2) = 24$

$$P_4(x) = 53 + 77(x-2) + \frac{88}{2!}(x-2)^2 + \frac{66}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4 =$$

$$= 53 + 77(x-2) + 44(x-2)^2 + 11(x-2)^3 + (x-2)^4$$

Nota:

También se puede obtener el desarrollo sin más que dividir sucesivamente el polinomio por $(x-2)$.

6.- *Hallar los desarrollos de Maclaurin de las funciones:*

a) e^x; b) $\operatorname{sen} x$; c) $\ln(1+x)$.

Solución:

a) $y = e^x$ $\qquad$ $y(0) = e^0 = 1$

$y' = e^x$ $\qquad$ $y'(0) = 1$

$y^n = e^x$ $\qquad$ $y^n(0) = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

b) $y = \text{sen}x$

$y' = \cos x \qquad y'(0) = \cos 0 = 1$

$y'' = -\text{sen}x \qquad y''(0) = \text{sen}0 = 0$

$y''' = -\cos x \qquad y'''(0) = \cos 0 = -1$

$y^{IV} = \text{sen}x \qquad y^{IV} = \text{sen}0 = 0$

$$\text{sen}x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

c) $y = \text{Ln}(1+x)$

$$y' = \frac{1}{1+x} \qquad y'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad y''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$$

$$y''' = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = -\frac{2}{(1+x)^3} \qquad y'''(0) = \frac{2.3}{(1+0)^3} = 2$$

$$y^{IV} = -\frac{2.3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{2.3}{(1+x)^4} \qquad y^{IV}(0) = -\frac{2.3}{(1+0)^4} = -3!$$

$$y^n = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\text{Ln}(1+x) = 1x - \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} - \frac{3!\cdot x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{(n-1)!}{n!}x^n + \ldots$$

$$\text{Ln}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + \ldots$$

7.- Encontrar los tres primeros terminos del desarrollo de Maclaurin de la función:

$$f(x) = tgx + \sqrt{1 + x}$$

Solución:

Calculemos separadamente cada uno de los desarrollos de:

$$f(x) = tgx, \quad f(x) = \sqrt{1 + x}$$

$$f(x) = tgx = \frac{senx}{cosx} \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{cos^2+sen^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} \qquad f'(0) = \frac{1}{cos^2\ 0} = 1$$

$$f''(x) = +\frac{2cosx\ senx}{cos^4x} = \frac{2senx}{cos^3x} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{2cos^4x+6cos^2xsen^2x}{cos^6x} = \frac{2cos^2x+6sen^2x}{cos^4x} \qquad f'''(x) = 2$$

$$tgx = x+ \frac{2x^3}{3!} = x+ \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad f(0) = \sqrt{1+0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\ \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = -\frac{1}{4}\ \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = +\frac{1}{4}\ \frac{3}{2}\ \frac{(1+x)^{1/2}}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

Sumando ambos tenemos:

$$tgx + \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3$$

8. - Aplicando los desarrollos de Taylor calculemos con error menor que una centesima los valores de:

Ln 1,2; y $\sqrt{5}$

<u>Solución:</u>

Sabemos que:

$$Ln\ (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Haciendo: $x = 0{,}2$

$$Ln\ 1{,}2 = 0{,}2 - \frac{0{,}04}{2} + \frac{0{,}008}{3} = 0{,}22$$

Debemos calcular el desarrollo de $\sqrt{4 + x}$

$y = \sqrt{4 + x}$ $\qquad y(0) = \sqrt{4} = 2$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}$ $\qquad y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$

$y'' = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(4+x)^{3/2}}$ $\qquad y''(0) = -\dfrac{1}{32}$

$$\sqrt{4 + x} = \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32.2} = 2{,}22$$

También se puede poner $\sqrt{5} = \sqrt{4 + 1} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}}$ y desarrollamos $\sqrt{1 + x}$

9.- Utilizar los desarrollos en serie para calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Ln\,(1+x) + e^{\frac{x^2}{2}} - (1+x)}{x^3}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x + \operatorname{sen} x}$

Solución:

Sustituyendo las funciones por sus correspondientes desarrollos será:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots - 1 - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x + x - \frac{x^3}{3!} + \cdots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \cdots}{2x - \frac{x^3}{3!} + \cdots} = 0$$

10.- Hallar extremos relativos de:

a) $y = x^4 e^{-x^2}$; *b)* $y = x\,(x-2)^2 (x+1)^3$

Solución:

a) $y = x^4 e^{-x^2}$

$$y' = 4x^3 e^{-x^2} - x^4 e^{-x^2} 2x = x^3 \left[4e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}\right] = x^3 e^{-x^2} \left[4-2x^2\right]$$

$$y' = 0 \qquad x = 0 \qquad 4 - 2x^2 = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$y'' = \left[3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2}\right] (4-2x^2) - 4x^4 e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2} \left[12x^2 - 6x^4 - 8x^4 + 4x^6 - 4x^4\right] = e^{-x^2} x^2 \left[12-18x^2 + 4x^4\right]$$

Para $x^2 = 2$ $\quad x = \pm\sqrt{2}$ $\quad 12-18.4 + 4.4 = -44 < 0$ máximo.

Para $x = 0$ $\quad y'' = 0$ debemos estudiar localmente, la variación de - la derivada.

Para $x < 0$ y $x > 0$.

Para $\forall x$ $e^{-x^2} x^2$ es > 0 .Luego tenemos que ver el signo de:

$$12 - 18x^2 + 4x^4$$

Para $x = 0{,}1$ $\quad 12 - 18x^2 + 4x^4 > 0$. Por tanto en 0 hay minimo.

$x = 0{,}1$ $\quad > 0$

Podemos estudiar localmente la función en el punto cero.

Para $x < 0$ $\quad x^4 e^{-x^2} > 0$

$x > 0$ $\quad x^4 e^{-x^2} > 0$

en el cero hay minimo.

b) $y = x(x-2)^2(x+1)^3$

$$y' = (x-2)^2(x+1)^3 + 2x\,(x-2)(x+1)^3 + 3x\,(x+1)^2(x-2)^2 =$$

$$= (x-2)(x+1)^2 \left[(x-2)(x+1) + 2x(x+1) + 3x(x-2)\right] =$$

$$= (x^2 + x - 2x - 2 + 2x^2 + 2x + 3x^2 - 6x).(x - 2).(x + 1)^2 =$$

$$= (x - 2).(x + 1)^2.\ (6x^2 - 5x - 2\ )$$

$$y' = 0 \begin{cases} x - 2 = 0 \\ (x+1)^2 = 0 \\ 6x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$$

Estudiamos localmente la función "y" en el punto $x = 2$.

$x > 2 \qquad y > 0$

$x < 2 \qquad y > 0$

$x = 2$ minimo.

b) en $x = 1$ por la misma razón también minimo.

c) $6x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{12} = \begin{cases} 1{,}13 \\ -0{,}3 \end{cases}$$

$C_1 \quad x = -0{,}3 \qquad x < -0{,}3 \quad y < 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x > -0{,}3 \quad y < 0$

$-0{,}3$ máximo.

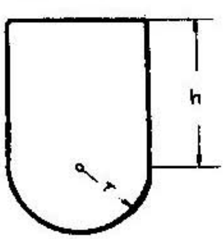
$C_2 \quad x = 1{,}13 \qquad x < 1{,}13 \quad y > 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x > 1{,}13 \quad y > 0$

1,13 mínimo.

11.- Un deposito con tapa esta formado por un cilindro que termina en su parte inferior por una semiesfera, se pide: las dimensiones del deposito si debe tener un volumen "v" y se desea que el area total sea minima.

<u>Solución:</u>



$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$A_t = 2 \pi r h + 3 \pi r^2$$

$$h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$$

Sustituyendo:

$$2\pi r \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} + 3\pi r^2 = A_t$$

$$A'_t = \frac{-4\pi r^3 - 2v + \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} + 6\pi r = 0$$

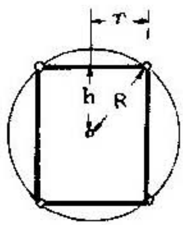
$$-4\pi r^3 - 2v + \frac{4}{3}\pi r^3 + 6\pi r^3 = 0 \qquad \frac{10}{3}\pi r^3 = 2v$$

$$r^3 = \frac{6v}{10\pi} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{6v}{10\pi}}$$

$$h = \frac{v - \frac{2}{3}\pi \frac{6v}{10}}{\pi\sqrt[3]{\frac{6v}{10\pi}}} = \frac{\frac{3}{5}v}{\sqrt[3]{\frac{6v}{4\pi}}}$$

12. - *Inscribir en una esfera de radio R un cilindro de volumen máximo.*

Solución:



$$V = \pi r^2 \, 2h$$

$$r^2+h^2 = R^2 \quad r^2 = R^2-h^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$$

$$V = 2\pi (R^2 - h^2)h \qquad r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

$$V' = 2\pi (R^2 - h^2) - 4\pi h^2 = 2\pi R^2 - 2\pi h^2 - 4\pi h^2$$

$$V' = 0 \qquad 6\pi h^2 = 2\pi R^2 \qquad h^2 = \frac{R^2}{3} \qquad h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

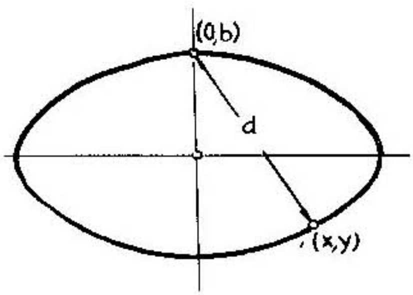
$V'' = -12\pi h < 0.$ Máximo.

13.- Hallar la cuerda máxima de la elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad 0 < b < a$$

que pase por el punto $(0,b)$.

Solución:



$$d^2 = x^2 + (y-b)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \qquad x^2 = a^2\left(\frac{b^2-y^2}{b^2}\right)$$

$$d^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) + (y-b)^2$$

$$d^{2\prime} = -\frac{2a^2}{b^2}y + 2(y-b) =$$

$$= -\frac{2a^2 y}{b^2} + 2y - 2b$$

$$d^{2\prime} = 0 \Rightarrow -2a^2y + 2b^2y - 2b^3 = 0 \quad y(b^2-a^2) = b^3 \quad y = \frac{b^3}{b^2-a^2}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left[b^2 - \frac{b^6}{(b^2-a^2)^2}\right] = \frac{a^2}{b^2}\; b^2\,\frac{[b^4 + a^4 - 2b^2a^2] - b^4}{(b^2-a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^6 - 2b^2a^4}{(b^2-a^2)^2}$$

$$(y - b)^2 = \left(\frac{b^3}{b^2 - a^2} - b\right)^2 = \left[\frac{b^3 - b^3 + ba^2}{b^2 - a^2}\right]^2 = \frac{b^2\ a^4}{(b^2-a^2)^2}$$

Sumando:

$$d^2 = \frac{a^6 - 2b^2\ a^4 + b^2\ a^4}{(b^2 - a^2)^2} = \frac{a^4(a^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)^2} = \frac{a^4}{a^2 - b^2} = \quad d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

> *14.- Representar gráficamente la función:*
>
> $$y = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$$

<u>Solución:</u>

Dominio: $R - \{-1\}$

Variación de "y":

x	-2 -1	0 1 2
x^3	- - - -	+ + + +
$(x + 1)^2$	+ + + +	+ + + +
y	- - - -	+ + + +

Asintotas:

Verticales: $x = -1$

Horizontales: no tiene

Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x + 1)^2} = 1 \ ; \quad n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{(x + 1)^2} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{(x + 1)^2} = - 2$$

$$y = x - 2$$

<u>Máximos y mínimos.</u>

$$y' = \frac{x^3 + 3x^2}{(x + 1)^3}$$

$$y' = 0 \; ; \quad x^2(x + 3) = 0 \quad ; \qquad x = 0 \; ; \quad x = -3$$

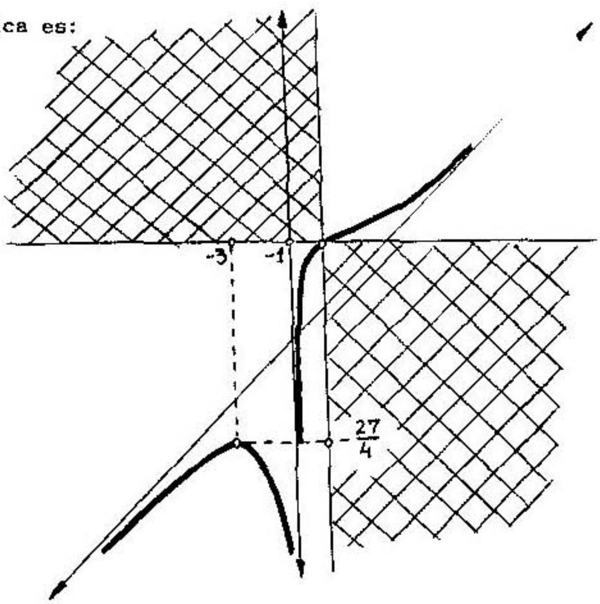
	-3	-1	0	
x^2	+	+ +	+ +	+ + +
$x + 3$	−	+ +	+ +	+ + +
$(x + 1)^3$	−	− −	+ +	+ + +
y'	+	− −	+ +	+ + +
y	↑	↓	↑	↑

Por lo tanto:

$$(-\ 3\ \frac{-27}{4})$$

es un máximo y el punto (0,0) es un punto de inflexión.

La gráfica es:



15.- Representar gráficamente la función:

$$y = x^2 . e^{-x}$$

Solución:

Dominio: R

Variación de "y". $y > 0$

para todo valor de "x", pues: $x^2 > 0$; $e^{-x} > 0$

Asintotas:

Verticales: Puesto que $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ y $e^x \neq 0$; $\forall x \in R$, no hay asintotas de este tipo.

Horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{x} = 0 \quad ; \quad y = 0$$

Oblicuas: No tiene

Máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$$y = \frac{x^2}{e^x} \quad ; \quad y' = \frac{2x\, e^x - x^2\, e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$y' = 0 \qquad 2x - x^2 = 0 \qquad x(2-x) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = 2 & y = \dfrac{4}{e^2} \end{cases}$$

Por otra parte:

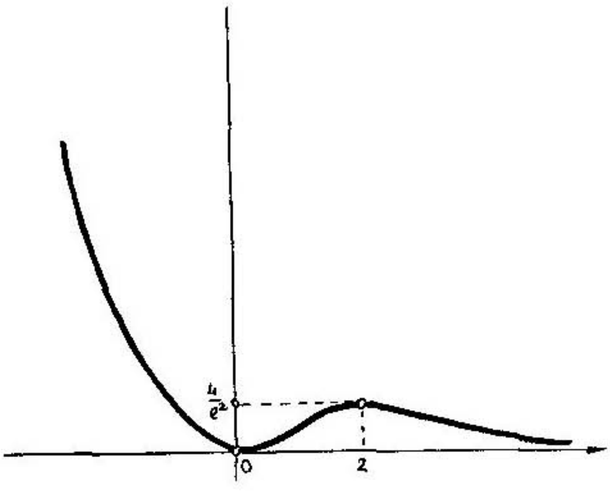
x		0		2	
x	- - - -		+ +		+ +
2-x	+ + + +		+ +		- -
y'	- - - -		+ +		- -
y	↓		↑		↓

Así : $(0,0)$ es un mínimo.

$(2, \frac{4}{e^2})$ es un máximo.

$$y'' = \frac{(2-2x)e^x - (2x - x^2)e^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 4x + x^2}{e^x}$$

$$y'' = 0 \quad ; \quad 2 - 4x + x^2 = 0 \qquad \begin{array}{ll} x = 2 + \sqrt{2} & y = (6+4\sqrt{2})/e^{2+\sqrt{2}} \\ x = 2 - \sqrt{2} & y = (6-4\sqrt{2})/e^{2-\sqrt{2}} \end{array}$$



EJERCICIOS PROPUESTOS.

16.- Demostrar la igualdad $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

17.- Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}^2 x}{x^6}$$

Solución:

$$\frac{1}{18}$$

18.- Hallar la distancia máxima y minima del punto (3,3) a la circunferencia:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

19.- Obtener el desarrollo de la función:

$$y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$$

hasta el termino de x^5:

Solución: $$x - \frac{x^3}{3} + x^5 \left[\frac{2}{5!} + \frac{3}{3!^2} \right]$$

20.- Encontrar el máximo y minimo de la función:

$$y = 3x^4 - 12x^2 - 4x^3 + 24x + 7$$

$$y = \frac{x - 1}{x + 1} \qquad y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

Solución:

a) 1,2, máx, 1 mini.; b) no tiene

21.- Dada la esfera de radio "R" inscribir el cilindro de volumen máximo.

22.-¿Que sector circular hay que recortar de un circulo de radio "R" para que con el resto se pueda hacer un embudo de volumen máximo?.

23.- Hallar la longitud máxima de una viga para pasar en posición horizontal de una calle de anchura "a" a otra de anchura "b".

Nota: Utilizar la ecuación segmentaria de la recta.

24.- Se considera una ventana rectangular tal que el lado superior ha sido sustituido por un triangulo equilatero. Sabiendo que el perimetro de la ventana es 4,5m. Hallar las dimensiones para que el area sea máxima.

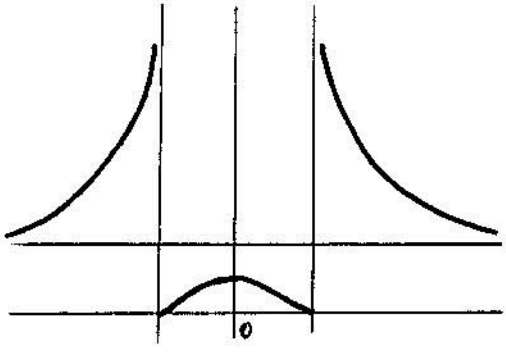
25.- Calcular el angulo de corte de las curvas: $y = x.e^{x}$ e $y = x^{2}e^{x}$.

Solución: En x=0: 45º. En x=1: $\text{artg}\ \dfrac{e}{1 - 6e^{2}}$

26.- Representar graficamente la función:

$$y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}} - 1.$$

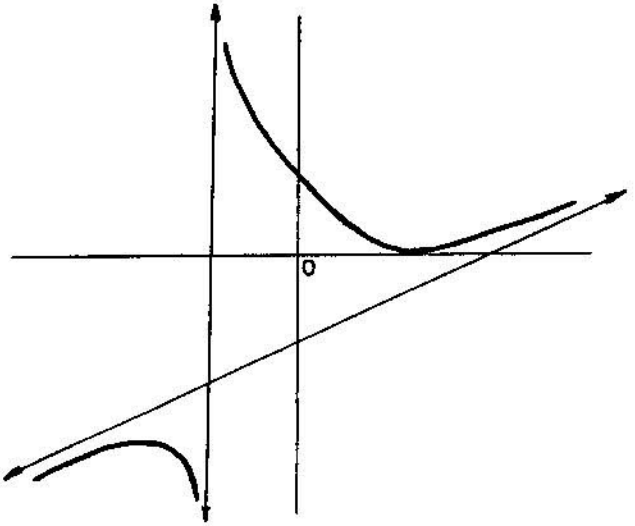
Solución:



27.- Representar graficamente la función:

$$y = \sqrt[3]{\frac{(x - 2)^4}{x + 1}}$$

Solución:



LECCION 8

ECUACIONES ALGEBRAICAS.

Introducción Teorica.

Definición. Se llama ecuación algebraica a una ecuación de la forma - $P(x) = 0$ donde $P(x)$ es un polinomio en la variable compleja "x" con coeficiente en R.

Si el polinomio es de grado "n" se dice que la ecuación es de orden "n".

Definición. Si un número complejo "r" es tal que $P(r) = 0$ se dice que - "r" es raiz de la ecuación $P(x) = 0$ ó "r" es cero del polinomio $P(x)$.

Lema. Si "r" es la raiz de $P(x) = 0$ entonces el conjugando de "r" también es raiz.

Si "r" es una raiz de $P(x) = 0$ entonces el polinomio $P(x)$ es divi - sible por $x-r$.

Resolución de Ecuaciones Algebraicas.

Sabemos resolver las ecuaciones de segundo grado, bicuadradas y también podriamos concer unas formulas más o menos complicadas para las - ecuaciones de tercer y cuarto grado, sin embargo ABEL demostró que a partir de las de quinto grado no son resoluble por radicales. En estos ca - sos que son las que más se presentan calculamos las raices utilizando - las relaciones de las raices y los coeficientes y los metodos de acota - ción , separación y aproximación que vamos a indicar a continuación.

Formulas de Cardano Vietta.

Si $r_1\ r_2\ \ldots\ r_n$ son las raices de $P(x) = 0$ entonces se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum_{i>j} \sum_{j=1}^{n} r_i r_j = \frac{a_2}{a_0}$$

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{n} r_i = \frac{a_n}{a_0}$$

Si una ecuación algebraica de coeficiente enteros admiten una raiz entera, la posibles raices son los divisores del termino independiente y además:

P(1) es multiplo de r-1

P(-1) es multiplo de r+1

donde "r" es la posible raiz.

Si una ecuación tiene coeficiente racionales se puede convertir en coeficiente enteros multiplicando por el mínimo común denominador, las raices racionales de esta ecuación de la forma $\frac{p}{q}$ con "p" y "q" irreducibles verifican las condiciones siguientes:

p es divisor de a_n

q es divisor de a_0

Donde $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} +\ldots+ a_n$

Si $a_0 = 1$ la ecuación no tiene raices racionales propiamente dichas.

Raices Multiples.

Dada una ecuación de coeficientes reales (complejas), la condición necesaria y suficiente para que una raiz "r" tenga orden de multiplicidad "α" es que:

$$P(r) = P'(r) = \ldots . P^{\alpha-1}(r) = 0 \quad P^{(\alpha)}(r) \neq 0$$

Lema.

Si $Q(x)$ = m.c.d.(máximo común divisor) de $P(x)$ y $P'(x)$ del polinomio $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tiene las mismas raices que $P(x)$ con orden de multiplicidad uno.

Acotación de las Raices Reales de una Ecuación Algebraica con Coeficientes Reales.

Sea la ecuación:

$$a_0x^n + a_1x^{n.1} + \dots + a_n = 0$$

con $a_0 > 0$ (si $a_0 < 0$ multiplicar toda la ecuación por -1).

Definición:

Se llama cota superior de las raices positivas a cualquier número que sea mayor que la mayor de las raices.

Si desarrollamos $P(x)$ tendremos:

$$P(x) = P(a) + P'(a)\ (x-a) + \frac{P''(a)}{2!}\ (x-a)^2 + \dots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

la condición para $P(L) > 0$ siendo $L > a$ sera que $P(a)\ P'(a)+\dots+P''(a)$ sean mayor que cero. En esto consiste el método de Newton, es decir buscar un valor "L" tal que el polinomio y sus "n" derivadas sean positivas.

Método de Laguerre.

Consiste en encontrar el primer número natural "n" tal que al dividir $P(x)$ por $x-n$ el resto y las coeficientes del cociente sean todos positivos o nulos.

Método de los grupos. Se descompone el $P(x)$ en distintos grupos empezando por un signo positivo y de manera que en cada uno de estos grupos y no haya más que una variación de signo.

Nota. Solo hemos definido la cota superior positiva puesto que si en la ecuación hacemos el cambio $Y = \frac{1}{x}$ la cota superior del polinomio en "y" es la cota inferior positiva de $P(x)$.

De la misma manera si $y = -x$, la cota superior e inferior del polinomio en "y" y con el signo cambiado nos da las cotas inferior y superior de las raices negativas.

Teorema. El número de las raices positivas de la ecuación $P(x) = 0$ es igual o inferior en un número par al número de variaciones de signos de la sucesión formada por los coeficientes de $P(x)$.

Para la negativas se cambian previamente "x" por "-x".

Método de Separación de Raices Reales en una Ecuación con Coeficientes Reales.

Método de Rolle. Sean L_1 y L_2 las cotas superiores e inferiores de $P(x) = 0$. Sean $\alpha_1\ \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ las raices de $P'(x) = 0$, probamos estas raices en $P(x)$ para ver si tiene raices multiples, en caso contrario construimos la sucesión ordenando $L_2\ \alpha_1\ \alpha_2 + \ldots + \alpha_k\ L_1$ en cada intervalo determinado por dos elementos consecutivos de esta sucesión existe como máximo una raiz de $P(x)$.

Este método es útil cuando se conocen las raices de $P'(x)$.

Método de Sturn. Sea $P(x) = 0$ una ecuación algebraica con coeficiente en R que no posee raices multiples. Sea (α, β) tal que $P(\alpha) \neq 0$; $P(\beta) \neq 0$ el número de raices reales contenidas en (α, β) es igual a la diferencia del número de variaciones de la sucesión:

$$f_1(x),\ f_2(x)\ ,\ldots.\ f_k(x) \quad \text{para } x = \alpha \quad \text{y} \quad x = \beta$$

Donde $f_1(x) = P(x)$ $f_2(x) = P'(x) = P'(x)$ y los demás son los restos cambiados de signo de aplicar el algoritmo de Euclider a los polinomios $P(x)_1$ $P'(x)$.

Nota.

a) El número de variaciones no se altera al multiplicar el dividendo por un número positivo.

b) Si $P(x) = 0$, tiene raices multiples entonces se considera el polinomio $P(x)$ dividido por m.c.d. $(P(x)_1\ P'(x))$ que sabemos que tiene las mismas raices de $P(x)$ pero con orden de multiplicidad 1.

c) Diremos que existe una variación de signo cuando $f_k(x)$ y $f_{k+1}(x)$ tienen signo distintos para un mismo x.

Aproximación de una Raiz Real de una Ecuación $f(x) = 0$.

Método de la cuerda.

Sea la ecuación:

$$f(x) = 0 \quad \text{con } f(a) \neq 0 \neq f(b)$$

siendo los signos de $f(a)$ y $f(b)$ opuestos, una aproximación de la raiz se obtiene:

$$x_1 = \frac{a\, f(b) - b\, f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Se reintera el proceso tomando de los intervalos $|a\ x_1|$ y $|x,b|$ aquel en el que $f(x)$ cambia el signo.

Método de Newton.

Sea $f(x) = 0$, una ecuación que tiene una raiz en (a,b) intervalo en cuyos extremos $f(x)$ toma signo opuestos.

Supongamos que f' y f'' mantienen el signo en (a,b).

Sea α el extremo en el que f y f'' tienen el mismo signo, suponemos $f'(x) \neq 0$. Entonces la aproximación de la raiz será:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \cdots\cdots \alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{f(\alpha_{n-1})}{f'(\alpha_{n-1})}$$

Todos estos resultados que hemos enunciados en esta introdución lo utilizamos a continuación para resolver los siguientes problemas.

Algunos Tipos de Ecuaciones Especiales.

A los tipos de ecuaciones de segundo grado bicuadradas, o de tercer orden sin terminos independientes que ya sabemos resolver, vamos añadir - ahora las ecuaciones reciprocas.

Definición.

Se llama ecuación reciproca aquella que por cada raiz "a" admite - también la $\frac{1}{a}$ y se notan en que los terminos equidistantes de los - extremos son iguales y del mismo signo, o iguales y de signo contrario.

Si la ecuación es de grado impar entonces admite la raiz 1 ó -1, - por tanto la podemos reducir a una ecuación de grado par dividiendo por x-1 ó x+1; según el caso.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Encontrar las raices de una ecuación sabiendo que tiene raices simples, dobles y triples.

Solución:

Supongamos la ecuación $P(x) = 0$, donde:

$$P(x) = f_1(x)\ [f_2(x)]^2\ [f_3(x)]^3$$

donde hemos descompuesto $P(x)$.

Sea:

$$D(x) = \text{m.c.d de } [P(x), P'(x)] = f_2 . f_3^2$$

$$M(x) = \text{m.c.d. de } [D(x), D'(x)] = f_3.$$

por tanto $f_2(x) = \dfrac{D(x)}{f_3^2(x)}$ y dividiendo $P(x)$ por $f_2(x)^2\ f_3(x)^3$ tendremos - el valor de $f_1(x)$, con lo que tendremos resuelto el problema.

2.- Encontrar las raices enteras de la ecuación:

$$x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$$

Solución:

Las posibles raices enteras seran los divisores de 42.

Los posibles divisores son:

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$\pm 1\ \pm 2\ \pm 3\ \pm 6\ \pm 7\ \pm 14\ \pm 21\ \pm 42$

$$P(1) = 1 - 12 + 41 - 42 = -12$$

$$P(-1) = -1 - 12 - 41 - 42 = -96$$

Los divisores de -12 son:

$$\pm 1\ \pm 2\ \pm 3\ \pm 4\ \pm 6\ \pm 12$$

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 \pm 16 \pm 32$

$\pm 3 \pm 6 \pm 12 \pm 24 \pm 48 \pm 96$

$$r - 1 = \begin{cases} 1\ 2\ 5\ 6\ 13\ 20\ 41 \\ -2\ -3\ -4\ -7\ -8\ -15\ -22\ -43 \end{cases}$$

Las posibles raices seran:

$$2,\ 3,\ 7,\ -1,\ -2,\ -3,\ -7.$$

$r+1 = 3,\ 4,\ 8,\ -1,\ -2,\ -6,$ que son divisores de $P(1)$ por tanto deberiamos probar las raices: 2, 3, 7, -2, -3, -7. Las raices son 2,3,7.

3.- Encontrar las raices racionales de:

$$12x^4 - 16x^3 - 21x^2 + 37x - 12 = 0$$

Solución:

Sabemos que si una ecuación $P(x) = 0$, admite una solución $\frac{P}{q}$ con "P y q" irreducible (primas entre si) entonces:

P es divisor de a_n

q es divisor de a_0

Los divisores de a_n y a_0 son:

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6 \pm 12$$

Por tanto las posibles raices serán:

$$\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6} \pm \frac{1}{12}$$

$$\pm 2 \pm 1 \pm \frac{2}{3} \pm \frac{2}{6} \pm \frac{2}{12}$$

$$\pm 3 \pm \frac{3}{2} \pm 1 \pm \frac{3}{6} \pm \frac{3}{12}$$

$$\pm 6 \pm \frac{6}{2} \pm \frac{6}{3} \pm \frac{6}{6} \pm \frac{6}{12}$$

$$\pm 12 \pm \frac{12}{2} \pm \frac{12}{3} \pm \frac{12}{6} \pm 1.$$

Se simplifican las raices que se repiten y probamos en la ecuación podemos comprobar que las soluciones son:

$$x = 1; \quad x = \frac{1}{2} \; ; \; x = -\frac{3}{2} \; ; \quad x = \frac{4}{3}$$

4.- Encontrar los valores de "A y B" para que la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 + Ax + B = 0$$

tenga una raiz doble y además admita "-4" como raiz.

Solución:

Podemos considerar dos casos, uno en el "-4" sea la raiz doble y otro en el que "-4" sea una raiz simple.

Supongamos que "-4" es raiz simple por tanto P(x) es divisible por x + 4, aplicando Rufini tendremos:

	1	2	A	B
-4		-4	8	-4(8+A)
	1	-2	8+A	-4(8+A)+B

$$-4(8 + A) + B = 0 \qquad B - 4A = 32$$

$$B = 32 + 4A = 32 - 28 = 4$$

$$x^2 - 2x + 8 + A = 0$$

tiene una raiz doble.

$$2x_1 = 2 = \quad x_1 = 1$$

$$x_1^2 = 8+A = \quad A = -7$$

también podemos hacer:

$$x^2 - 2x + (8 + A) = (x - a)^2$$

y despejando el valor de"a" se obtiene $a = 1$, teniendo en cuenta que $8 + A$ es igual a 1 , implica que $A = -7$.

Por tanto en el caso de ser "-4" raiz simple tendremos, que también admite la raiz 1 doble y la ecuación es:

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$$

supongamos ahora que "-4" es raiz doble. Tendremos $B - 4A = 32$ y además $x^2 - 2x + (8 + A)$ sera divisible por $x + 4$ aplicando nuevamente Rufini.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 8+A \\ -4 & & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 24+8+A \end{array}$$

Por tanto:

$$24 + 8 + A = 0 = A = -32$$

Sustituyendo:

$$B = 32 + 4A = 32 - 128 = -96$$

y la otra raiz sera:

$$x = 6 \text{ simple.}$$

5.- Encontrar un polinomio de cuarto grado sabiendo:

a) que admite "i" como raiz.

b) que es divisible por $x-2$.

c) al dividir por $x-1$ da de resto 6.

d) el coeficiente de mayor orden es 1.

Solución:

Si admite "i" como raiz también tendra a su conjugado por tanto el polinomio es divisible por x^2+1.

$$P(x) = (x^2+1)(x-2)(x-B)$$

Para:

$$x = 1 \quad P(1) = 6 \quad = \quad 6 = -2(1-B) = -2 + 2B \qquad B = 4.$$

Por tanto el polinomio buscado sera:

$$P(x) = (x^2+1)(x-2)(x-4) = x^4-6x^3+9x^2-6x+8$$

6.- Acotar utilizando los métodos de Laguerre, Newton y de los grupos las raices de:

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3 = 0$$

Solución:

Método de Newton.

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3 \qquad x \geq 4$$

$$5x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 2x \qquad x \geq 3$$

$$20x^3 - 48x^2 + 18x - 2 \qquad x \geq 2$$

$$60x^2 - 96x + 18 \qquad x \geq 2$$

$$120x - 96 \qquad x \geq 1$$

$$120$$

Por tanto la cota superior sera $L = 4$.

Si cambiamos x por -x resulta.

$$-x^5 - 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 3 = 0$$

para que el coeficiente de mayor grado sea positivo:

$$x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 3 = 0$$

$$P(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 3 \qquad x \geq 1$$

$$P'(x) = 5x^4 + 16x^3 + 9x^2 + 2x \qquad x \geq 0$$

$$P''(x) = 20x^3 + 48x^2 + 18x + 2 \qquad x \geq 0$$

$$P'''(x) = 60x^2 + 96x + 18 \qquad x \geq 0$$

$$P^{IV}(x) = 120x + 96 \qquad x > 0$$

$$P^{V}(x) = 120$$

La cota inferior sera L = -1.

Veamos el método de Laguerre.

	1	-4	+3	-1	0
4		4	0	12	44
	1	0	3	11	44

La cota superior es L = 4.

Al cambiar x por -x:

$$x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 3$$

	1	4	3	1	0	-3
1		1	5	8	9	9
	1	5	8	9	9	6

La cota inferior es L = -1

Por último veamos el método de los grupos.

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3$$

$$x^5 - 4x^4 \qquad x \geq 5$$

$$3x^3 - x^2 \qquad x \geq 1$$

$$3 \qquad x \geq 0$$

La cota superior sera L = 5.

Al cambiar x por -x:

$$x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 - 3$$

solo hay un grupo que es P(x); P(x) > 0 para x > 1, por tanto la cota inferior sera L = -1.

7.- Utilizar el método de Rolle para separar las raices de la ecuación:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 4 = 0$$

Solución:

Veamos las cotas:

$$x^4 - 8x^3 \qquad x \geq 8$$

$$22x^2 - 24x + 4 \qquad x \geq 0$$

La cota superior es 8.

Al cambiar x por -x:

$$x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 4 = 0$$

la cota inferior es 0.

$$P'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

para hallar las raices podemos simplificar por 4 y sera:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

cuyas raices son: 1; 2 y 3, por tanto construimos la sucesión 0,1,2,3,8, y por el Teorema de Rolle sabemos que cada intervalo (0,1);(1,2);(2,3);(3,8); hay como maximo una raiz. Veamos los signos de P(x) en estos puntos:

	P(x)
0	+
1	-
2	-
3	-
8	+

Por tanto hay raices en los intervalos (0,1) y (3,8).

8.- Sabiendo que la ecuación:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 4 = 0$$

tiene una raiz en el intervalo (0,1) aproximar dicha raiz.

Solución:

a) Método de la cuerda.

$$f(0) = 4; \quad f(1) = -5$$

una primera aproximación sera:

$$x_1 = \frac{-1.\ f(0)}{-5-4} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

por tanto la raiz estara en:

$$[\ 0,\ \frac{4}{9}]\ \text{ó}\ [\frac{4}{9}\ ,\ 1]$$

según $f(\frac{4}{9})$ sea - o + y podriamos seguir aplicando el método.

b) Método de Newton.

Veamos que cumple las condiciones para poder aplicar el método de - Newton.

$$f(0) = 4 \qquad\qquad f(1) = -5$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x = 24 \begin{cases} f'(0) = - \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44 \qquad \begin{cases} f''(0) = + \\ f''(1) = + \end{cases}$$

El extremo en el que f y f'' tienen el mismo signo es "0" por tanto una primera aproximación sera:

$$\alpha_1 = 0 - \frac{4}{-24} = \frac{1}{6}$$

Se puede repetir el procedimiento.

> *9.- Acotar, separar y aproximar las raices de la ecuación:*
>
> $$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Solución:

a) Acotación.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & -4 & -4 & 1 \\
2 & & 2 & 6 & 4 & 0 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1
\end{array}$$

por tanto 2 es cota superior.

Cambiando x por -x:

$$x^4 - x^3 -4x^2 + 4x + 1$$

utilizando el método de los grupos.

$$x^4 - x^3 - 4x^2 \qquad\qquad x \geq 3$$

$$4x + 1 \qquad\qquad x > 0$$

por tanto la cota inferior sera -3.

Vamos a separar utilizando el método de Sturn.

$$f_1(x) = P(x) = x^4 - x^2 - 4x^2 + 4x + 1$$

$$f_2(x) = P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 & 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \\ \cline{2-2}
4x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 16x + 4 & x - 4 \\
-4x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 4x & \\ \cline{1-1}
- x^3 - 8x^2 + 12x + 4 & \\
-4x^3 - 32x^2 + 36x + 12 & \\
4x^3 + 12x^2 - 32x + 16 & \\ \cline{1-1}
-20x^2 + 4x + 28 & \\
-5x^2 + x + 7 & f_3(x) = 5x^2 - x - 7
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
4x^3 - 3x^2 - 8x + 4 & 5x^2 - x - 7 \\ \cline{2-2}
20x^3 - 15x^2 - 40x + 20 & 4x - 11 \\
-20x^3 + 4x^2 + 28x & \\ \cline{1-1}
- 11x^2 - 12x + 20 & \\
- 55x^2 - 60x + 100 & \\
55x^2 - 11x - 77 & \\ \cline{1-1}
- 71x + 23 & f_4(x) = 71x - 23
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
5x^2 - x - 7 & 71x - 23 \\ \cline{2-2}
375x^2 - 71x - 497 & 5x + \frac{44}{71} \\
375x^2 + 115x & \\ \cline{1-1}
44x - 497 & \\
-44x \pm & f_5(x) = +
\end{array}
$$

	-2	-1	0	1	2
$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$	+	-	+	+	+
$4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$	-	+	+	-	+
$5x^2 - x - 7$	+	-	-	-	+
$71x - 23$	-	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+

nº de variaciones	4	3	2	2	0

Por tanto en el intervalo (-2-1) hay una raiz en (-1,0) otra y en - (1,2) hay dos raices.

Vamos aproximar una de ella por ej: la que esta entre (-1,0). Aplicamos el Método de Newton.

$$f(-1) = -5 \qquad f(0) = 1$$

$$f'(-1) = + = f'(0)$$

$$f''(-1) = +$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 8$$

$$f''(0) = -$$

No podemos aplicar Newton.

Por el Método de la cuerda seria:

$$\alpha = \frac{-1.1 - 0.(-5)}{1 - (-5)} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6} \simeq 0,33.$$

10.- Resolver la siguiente ecuación:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

Solución:

Esta ecuación es del tipo reciproca por tanto dividimos por x^2 y - resulta:

$$x^2 - 3x + 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Agrupando:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) -3 \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

Haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = y \longrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Por tanto:

$$y^2 - 2 - 3y + 1 = 0 \qquad y^2 - 3y - 1 = 0 \quad y = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 + 1 - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) x = 0 \qquad x = \frac{\frac{3+\sqrt{13}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4}}{2}$$

y por otra parte:

$$x^2 + 1 - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) x = 0 \quad = \quad x = \frac{\frac{3-\sqrt{13}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 4}}{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

11.- Hallar las raices de la ecuación:

$$x^8-6x^7+10x^6+2x^5-20x^4+14x^3-6x^2-10x+3 = 0$$

sabiendo que tiene raices dobles,triples, simples y que m.c.d entre P(x) y P'(x) es:

$$x^4-2x^3 + 2x - 1.$$

Solución:

$$P(x) = (x^2 - 1)^2(x-3)(x-1)^3$$

12.- Hallar las raices racionales de:

$$12x^4 - 17x^3 - 21x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Solución:

$$x = -1; \quad x = \frac{2}{3} ; \quad x = -\frac{1}{4} ; \; x = 2$$

13.- Acotar ,separar y aproximar las raices de:

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 12 = 0$$

Nota. Utilizar el método de Rolle.

Solución: Las cotas son 4 y -2, existe solución en los intervalos (-2-1) y (-1,1) y la soluciones son apróximadamente:

$$-\frac{9}{16} \quad y \; 1,12$$

14.- Acotar,separar y aproximar las raices reales de:

$$x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 3 = 0.$$

15.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x^5 - 10x^3 + 12x.$

b) $x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 1$

Solución:

a) $\pm\sqrt{2}\ \pm\ \sqrt{3}$ y 0

b) $1,\ \dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2-4}}{2},$

$$\dfrac{\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^2-4}}{2}$$

16.- Encontrar la relación entre "a y b" para que las raices de la ecuación:

$$x^2 + ax + b = 0$$

esten en la proporción $\dfrac{x_1}{x_2} = m.$

Solución:

$$a^2 m = b(1 + m)^2.$$

17.- Acotar, separar y aproximar las raices de:

$$x^3 - 5x + 1 = 0.$$

LECCION 9

PRIMITIVAS DE FUNCIONES.

Primitiva de una Función.

Dada una función $f(x)$ se llama primitiva a otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, y escribimos:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + k$$

Evidentemente la primitiva no es unico puesto que si $F(x)$ es una primitiva:

$$G(x) = F(x) + C$$

también lo es.

Propiedades.

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx.$$

$$\mu \int f(x)\, dx = \int \mu f(x)\, dx.$$

Tablas de Integrales Inmediatas.

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{Ln}\, |x| + C \qquad x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{ar\ tg}\ x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \mathrm{ar\ sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{ar\ cos} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Ln}\ |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C = \mathrm{arg\ sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Ln } |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C = \arg \text{ch}x + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\text{Ln } a} + C \qquad \int e^x \, dx = e^x + C.$$

$$\int \text{sen}x \, dx = - \cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \text{sen}x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C \qquad \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\text{cotg} + C$$

$$\int \text{sh } x \, dx = \text{ch}x + C \qquad \int \text{ch}x \, dx = \text{sh}x + C.$$

Métodos de Integración.

a) Por descomposición.

Consiste en utilizar las propiedades anteriores para descomponer la integral en otras inmediatas.

b) Método de sustitución o cambio de variable.

Dada la integral:

$$\int f(x) \, dx$$

este método consiste en hacer: $x = \phi(t)$ con lo que $dx = \Phi'(t)dt$ y la integral se convierte en:

$$\int f(\Phi(t)) \, \Phi'(t) \, dt.$$

Este método sera utilizado cuando esta última integral sea más fácil que la de partida.

c) Integración por partes.

Si u y v son funciones diferenciales de x entonces:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Al aplicar el método de integración por partes se pueden presentar dos tipos de problemas.

C_1) Problemas en los que se reduce el grado.

C_2) Problemas donde despues de integrar dos veces se llega a la integral de partida.

d) Integración por derivación con respecto a un parametro.

$$\int f(x,a)\, dx = F(x,a) + C$$

entonces:

$$\int \frac{\partial}{\partial a} f(x,a)\, dx = \frac{\partial}{\partial a} F(x,a) + C$$

Integrales Racionales.

Son las integrales del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

donde puede ocurrir que:

$$\text{gra } P(x) > \text{gra } Q(x)$$

$$\text{gra } P(x) = \text{grad } Q(x)$$

$$\text{gra } P(x) < \text{gra } Q(x)$$

Los dos primeros casos se pueden reducir al tercero sin más que dividir P(x) por Q(x).

Vamos a estudiar este tipo de integrales según sean las raices de - Q(x) distinguiremos que sean reales, distintas o multiples, complejas - simples o multiples.

a) Si las raices son simples y distintas la descomponemos de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2} + \ldots + \frac{N}{x-r_n}$$

donde cada integral $\frac{A}{x - r_1}$ es inmediata siendo:

$$\mathrm{Ln}\ |x - r_1| + C$$

los coeficientes A,B... se calculan identificando los polinomios.

b) Si las raices son multiples.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - r_1)} + \frac{B}{(x - r_1)^2} + \ldots + \frac{C}{(x - r_1)^\alpha} + \ldots$$

donde hemos supuesto que r_1 tiene un orden de multiplicidad α, la integral:

$$\int \frac{C}{(x - r_1)^\alpha}\, dx$$

es inmediata haciendo $x - r_1 = t$.

c) La raices son complejas simples.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x-a)^2+b^2} + \ldots.$$

donde estamos considerando las raices $a + bi$ y $a - bi$ la integral de la forma:

$$\int \frac{M\,x + N}{(x-a)^2+b^2}\, dx$$

Sera:

$$\int \frac{Mx + N}{(x-a)^2+b^2}\, dx = \int \frac{Mx - Ma + Ma + N}{(x - a)^2 + b^2}\, dx =$$

$$\frac{M}{2} \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + Ma + N \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} =$$

$$\frac{M}{2}\ \mathrm{Ln}\ [(x-a)^2+b^2] + \frac{Ma + N}{b}\ \mathrm{ar\ tg}\ \frac{x - a}{b} + C.$$

Si las raices complejas son multiples entonces utilizamos la descomposición de Hermite.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{P_1(x)}{Q_{-1}(x)}\right] + \frac{A}{x - r_1} + \dots + \frac{Mx + N}{(x-a)^2+b^2}$$

donde $Q_{-1}(x)$ es un polinomio que tiene las mismas raices que $Q(x)$ con un orden de multiplicidad menor, $P_1(x)$ es un polinomio de coeficiente indeterminados un grado menor que $Q_{-1}(x)$ y $A \dots Mx + N$ representa la descomposición correspondiente a cada raiz de $Q(x)$ considerados como simples.

Integrales Irracionales.

Son aquellas en las que el integrado aparece bajo el signo radical.

a) Integrales del tipo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{K - x^2}} \text{ haciendo } x = \sqrt{k} \text{ sent es inmediata } = \text{ar sen } \frac{x}{\sqrt{k}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{K + x^2}} \quad x = \sqrt{k} \text{ snt} \quad = \arg \text{sh } \frac{x}{\sqrt{k}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - K}} \quad x = \sqrt{K \text{ cht}} \quad = \arg \text{ch } \frac{x}{\sqrt{k}} + C.$$

b) Las integrales:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

se resuelven descomponiendo el trinomio:

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

si hacemos:

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = t.$$

tenemos las integrales del apartado "a".

c) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

donde R es una función racional, se racionaliza por las sustituciones de Euler.

Si:

$$a > 0 \quad \text{hacemos} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$$

$$a < 0 \quad c > 0 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$$

$$a < 0 \quad c > 0 \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$$

donde α es una raiz de:

$$ax^2+bx+c.$$

d) Si la integral es:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se descompone de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados un grado menor que $P(x)$ y k es constante.

En las integrales:

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

hacemos:

$$\frac{1}{mx+n} = t.$$

Integrales de la forma.

$$\int R\left(x_1\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\ldots\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n}{v}}\right)dx$$

en este tipo de integrales hacemos el cambio:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\beta}$$

donde β es el minimo común multiplo de $(n,q\ldots v)$.

Si en esta integral hacemos $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 1$; tenemos la integrales de la forma:

$$\int R\left(x, x^{m/n}, x^{p/q}\ldots x^{n/v}\right)$$

que resolvemos haciendo:

$$x = t^{\beta}\ ; \qquad \beta = \text{m.c.m.}(n,q\ldots v)$$

Integrales binomias.

Se denomina así a las integrales de la forma:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

donde $m,n,p \in Q$.

Si hacemos $x^n = t$ resulta:

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt = \int t^q(a+bt)^p\,dt.$$

estas integrales se pueden integrar por funciones elementales solo en - los casos siguientes:

a) "p" es entero.

b) "q" es entero.

c) ni "p" ni "q" son enteros pero p+q lo es.

a) Si "p" es entero hacemos $t = z^{\alpha}$ donde α es el denominador de "q" si $p > 0$, podemos desarrollar el binomio.

b) Si "q" es entero hacemos $a + bt = z^{\beta}$ donde β es el denominador de "p".

c) Si $p + q$, es entero entonces $\frac{a + bt}{t} = z^{\gamma}$, γ es mínimo común denominador de "p" y "q".

Integrales Trigonometricas.

Son integrales de la forma: $\int R\ (\operatorname{sen}x, \cos x)\ dx$ donde R es una función racional de sus argumentos.

a) si $R\ (-\operatorname{sen}x,\cos x) = -R\ (\operatorname{sen}x,\cos x)$ hacemos $\cos x = t$.

$R\ (\operatorname{sen}x,-\cos x) = -R\ (\operatorname{sen}x\ \cos x)$ hacemos $\operatorname{sen}x = t$.

$R\ (-\operatorname{sen}x,-\cos x) = R\ (\operatorname{sen}x, \cos x)$ hacemos $\operatorname{tg}x = t$.

Si la integral no responde a ninguno de los casos anteriores hacemos:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

Si hacemos $\operatorname{tg}x = t$ tenemos:

$$dx = \frac{dt}{1 + t^2} , \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} ; \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}$$

si utilizamos el cambio: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. entonces:

$$dx = \frac{2\ dt}{1 + t^2} ; \operatorname{sen}x = \frac{2t}{1 + t^2} ; \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

b) Para las integrales en las que aparecen productos de senos o cosenos o semicosenos, utilizamos las formulas de trigonometria que nos permiten poner el producto en forma de suma.

$$\text{sen } a \cos b = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\text{sen } a \text{ sen } b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

Hay una serie de integrales cuya integración no conduce a funciones elementales tales como:

$$\int \frac{dx}{\text{Lnx}} \quad ó \quad \int \frac{\text{senx}}{x}\, dx$$

este tipo de integrales no tiene más solución que la integración por desarrollos en series.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Utilizar el método de descomposición para calcular:

a) $\int (3\,e^x + x^3 + x^2)\,dx$ b) $\int (a^x + \operatorname{sen} x + 2x)\,dx$

Solución:

$$\int (3\,e^x + x^3 + x^2)\,dx = 3\int e^x dx + \int x^3 dx + \int x^2 dx = 3e^x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\int (a^x + \operatorname{sen} x + 2x)\,dx = \int a^x\,dx + \int \operatorname{sen} x\,dx + \int 2x\,dx =$$

$$= \frac{a^x}{\operatorname{Ln} a} + x^2 - \cos x + C.$$

2.- Por sustitución resolver las integrales:

a) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}\,dx;$ b) $\int \cos\frac{1}{x}\,\frac{1}{x^2}\,dx.$

Solución:

a) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}\,dx$ hacemos $e^{2x} = t$; $dt = e^{2x}.2\,dx$ =

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{2x} + 1} + C.$$

b) $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$ hacemos $\frac{1}{x} = t$, $-\frac{1}{x^2}\,dx = dt$ =

$$= \int -\cos t\,dt = -\operatorname{sen} t + C = -\operatorname{sen}\frac{1}{x} + C.$$

3.- Resolver utilizando el método de integración por partes:

a) $\int x^3 e^x\,dx$;   b) $\int \cos x\, e^x\,dx$

Solución:

a) $$\int x^3 e^x\,dx \begin{cases} x^3 = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \begin{cases} du = 3x^2\,dx \\ v = e^x \end{cases} = e^x x^3 - 3\int x^2 e^x dx =$$

$$=\begin{cases} x^2 = u & du = 2x\,dx \\ e^x\,dx = dv & v = e^x \end{cases} \quad x^3e^x - 3\left[x^2e^x - \int 2x\, e^x\,dx\right] =$$

$$= x^3e^x - 3x^2\,e^x + 6\int x e^x dx = \begin{cases} x = u & dx = du \\ e^x dx = dv & v = e^x \end{cases} =$$

$$= x^3\,e^x - 3x^2\,e^x + 6\left[e^x\,x - e^x\right] = e^x\left[x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right] + C.$$

b) $$\int \cos x\, e^x\,dx \begin{cases} \cos x = u & du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ e^x\,dx = dv & v = e^x \end{cases} = e^x\cos x + \int \operatorname{sen} x\, e^x dx =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{sen} x = u & du = \cos x\,dx \\ e^x\,dx = dv & v = e^x \end{cases} = e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\cos x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int e^x\cos x\,dx = e^x\left[\cos x + \operatorname{sen} x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x\left[\cos x + \operatorname{sen} x\right]}{2} + C.$$

4.- $\int ar\ \operatorname{sen} x\ dx.$

Solución:

$$\int ar\ \operatorname{sen} x\,dx = \begin{cases} ar\ \operatorname{sen} x = u & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dx = dv & v = x \end{cases} =$$

$$= x \text{ ar senx} - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x \text{ ar senx} + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$5.- \quad \int \left[\ln \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{2}{1 - x^2} \right] e^x\, dx.$$

Solución:

Descomponemos en dos:

$$I = \int \text{Ln} \frac{1 + x}{1 - x} e^x dx + \int \frac{2}{1 - x^2} e^x dx$$ hacemos la primera por partes.

$$\int \text{Ln} \frac{1 + x}{1 - x} e^x dx = \begin{cases} u = \text{Ln} \dfrac{1 + x}{1 - x} & du = \dfrac{1 - x}{1 + x} \cdot \dfrac{1 - x + (1+x)}{(1 - x)^2} = \\ e^x dx = dv & \end{cases}$$

$$= \left. \frac{2}{1 - x^2} \right\} = \text{Ln} \frac{1 + x}{1 - x} e^x - \int \frac{2}{1 - x^2} e^x dx \Rightarrow$$

$$I = \text{Ln} \frac{1 + x}{1 - x} e^x + C.$$

6.- Calcular:

$$I = \int \frac{e^{\text{ar tg } x}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx.$$

Solución:

$$\int \frac{e^{\text{ar tg } x}}{1 + x^2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$ (Procedemos por partes).

$$dv = \frac{e^{\text{ar tg } x}}{1 + x^2} dx \qquad v = e^{\text{ar tg } x}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad du = - \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

$$I = e^{\text{ar tg } x} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{\text{ar tg } x} dx =$$

$$dv = \frac{e^{\text{ar tg } x}}{1+x^2} dx \qquad v = e^{\text{ar tg } x}$$

$$u = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \qquad du = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= e^{\text{ar tg } x} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\text{ar tg}} - I$$

$$I = \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+1}} e^{\text{ar tg } x} + C.$$

7.- Calcular las integrales:

$$\mathcal{I}_1 = \int e^{ax} \operatorname{sen}^2 bx \, dx \qquad \mathcal{I}_2 = \int e^{ax} \cos^2 bx \, dx.$$

Solución:

Consideramos las integrales $I = I_1 + I_2 \qquad I' = I_1 - I_2$

$$I_1 + I_2 = \int e^{ax} [\operatorname{sen}^2 bx + \cos^2 bx] dx = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

$$I_2 - I_1 = \int e^{ax} [\cos^2 bx - \operatorname{sen}^2 bx] dx = \int e^{ax} \cos 2 bx \, dx.$$

Integral que se resuelve por partes:

$$I' = \int e^{ax} \cos 2 bx \, dx \left\{ \begin{array}{ll} e^{ax} = u & a e^{ax} dx = du \\ \cos 2 bx \, dx = dv & v = \dfrac{\operatorname{sen} 2bx}{2b} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{e^{ax} \operatorname{sen} 2bx}{2b} - \frac{a}{2b} \int e^{ax} \operatorname{sen} 2bx \, dx \left\{ \begin{array}{ll} e^{ax} = u & du = e^{ax} a \\ \operatorname{sen} 2bx \, dx = dv & v = -\dfrac{\cos 2bx}{2b} \end{array} \right. =$$

$$= \frac{e^{ax}\,\text{sen } 2bx}{2b} - \frac{a}{2b}\left[-e^{ax}\cdot\frac{\cos 2bx}{2b} + \int \frac{a}{2b}\, e^{ax}\cos 2bx\, dx\right]$$

$$I' = \frac{e^{ax}\,\text{sen } 2bx}{2b} + \frac{a}{4b^2}\, e^{ax}\cos 2bx - \frac{a^2}{4b^2}\, I.$$

$$I'\left[1 + \frac{a^2}{4b^2}\right] = \frac{e^{ax}}{4b^2}\left[2b\,\text{sen } 2bx + a\cos 2\,bx\right]$$

$$I' = \frac{\dfrac{e^{ax}}{4b^2}\left[2b\,\text{sen } 2bx + a\cos 2bx\right]}{\dfrac{a^2 + 4b^2}{4b^2}} = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[2b\,\text{sen}2bx + a\cos 2bx\right]$$

$$I_1 + I_2 = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$I_2 - I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[2b\,\text{sen } 2bx + a\cos 2bx\right]$$

$$I_2 = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2 + 4b^2}\left[2b\,\text{sen } 2bx + a\cos 2bx\right]\right] + C_1$$

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2 + 4b^2}\left[2b\,\text{sen } 2bx + a\cos 2bx\right]\right] + C_2.$$

8.- Resolver las siguientes integrales racionales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^3 - 3x + 2}$

Solución:

Dividimos:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -x^3 + 5x^2 - 6x & x + 5 \\ \quad -5x^2 + 25x - 30 & \\ \hline \qquad 19x - 30 & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = (x+5) + \frac{19x - 30}{x^2 - 5x + 6}$$

Las raices del denominador son 2 y 3 por tanto:

$$\frac{19x - 30}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}; \quad 19x - 30 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$x = 2 \ , \ 8 = -A \ , \ A = -8 \ , \ x = 3 \ , \ 27 = B$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 8 \text{ Ln } |x - 2| + 27 \text{ Ln } |x - 3| + C.$$

i) $$\int \frac{x\, dx}{x^3 - 3x + 2}$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Las raices son 1 doble y -2 la descomposición seria:

$$\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

$$x = A(x^2+x-2) + B(x+2) + C(x^2-2x+1) = x^2(A+C) + x(A+B-2C) + (-2A+2B+C)$$

$$A + C = 0 \qquad A = -C = \frac{2}{9}$$

$$A + B - 2C = 1 \qquad B - 3C = 1 \quad 3B = 1 \qquad B = \frac{1}{3}$$

$$-2A + 2B + C = 0 \qquad 2B + 3C = 0 \qquad C = -\frac{2B}{3} = -\frac{2}{9}$$

$$\int \frac{x\, dx}{x^3 - 3x + 2} = \frac{2}{9} \text{ Ln } |x-1| - \frac{1}{3} \ \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \text{ Ln } |x+2| + C'.$$

9.- a) $\displaystyle\int \frac{(x^2+x)\,dx}{(x^2+x+1)(x-3)}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Solución:

a) Como Q(x) tiene una raiz compleja y otra simple la descomponemos y – sería:

$$\frac{x^2+x}{(x^2+x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$x^2+x = Ax^2 + Ax + A + Mx^2 + Nx - 3Mx - 3N = x^2(A+M) + x(A+N-3M) + A-3N$$

$$\begin{array}{lll} A + M = 1 & 3N + M = 1 & 9N + 3M = 3 \\ A + N - 3M = 1 & 4N - 3M = 1 & \underline{4N - 3M = 1} \\ & & 13N = 4 \qquad N = \dfrac{4}{13} \\ A - 3N = 0 & & \end{array}$$

$$A = 3N = \frac{12}{13} \qquad M = 1 - \frac{12}{13} = \frac{1}{13}$$

$$\int \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)(x-3)}\,dx = \frac{12}{13}\,\mathrm{Ln}\,|x-3| + \frac{1}{13}\int \frac{x+4}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x^2+x+1| + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x^2+x+1| +$$

$$+ \frac{7}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dx\,\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]^2 + 1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|x^2+x+1| + \frac{7}{\sqrt{3}}\,\mathrm{artg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

b) En este caso son raíces múltiples, aplicaremos el método de Hermite.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \int \frac{Mx + N}{x^2 + 1} dx$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A(x^2+1) + 2x(Ax + B)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2+1}$$

$$1 = Ax^2 + A + 2Ax^2 + 2Bx + Mx^3 + Nx^2 + Mx + N$$

$$1 = Mx^3 + x^2 (3A + N) + x (2B + M) + A + N$$

$M = 0$

$3A + N = 0$ $\qquad N = -3A = \frac{3}{2}$

$2B + M = 0$ $\qquad B = 0$

$A + N = 1$ $\qquad -2A = 1 \quad A = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} x + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2} x + \frac{3}{2} \text{ ar tg} x + C.$$

10.- Calcular:

a) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ $\qquad$ b) $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

Solución:

a) $$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}$$

$$1 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B (x - 1)(x^2 + 1) + (Mx + N)(x^2 - 1)$$

$$1 = A(x^3 + x^2 + x + 1) + B\,(x^3 - x^2 + x - 1) + Mx^3 + Nx^2 - Mx - N.$$

$$1 = x^3(A + B + M) + x^2\,(A - B + N) + x\,(A + B - M) + A - B - N.$$

$$A + B + M = 0$$

$$A - B + N = 0$$

$$A + B - M = 0$$

$$A - B - N = 1$$

$$A + B = 0 \qquad 2A + 2B = 0$$

$$2A - 2B = 1 \qquad 2A - 2B = 1$$

$$4A = 1 \quad A = \frac{1}{4}\ ; \quad B = -\frac{1}{4}\ ; \quad M = 0\ ; \quad N = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\,|x - 1| - \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\,|x + 1| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\,|x - 1| - \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\,|x + 1| - \frac{1}{2}\,\mathrm{ar\,tg}\,x + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

$x^4 + 1 = 0$ Las raices serian las raices cuarta de -1.

$$\sqrt[4]{-1} = \begin{cases} 1_{\frac{\pi}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{\frac{3\pi}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{\frac{5\pi}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1_{\frac{7\pi}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \end{cases}$$

$$x^4 + 1 = \left[(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}\right]\cdot\left[(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}\right] = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

También se puede descomponer, considerando:

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$$

por tanto la descomposición sera:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Mx+N}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Px+Q}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$1 = (Mx+N)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Px+Q)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$1 = Mx^3+M\sqrt{2}x^2+MX+Nx^2+N\sqrt{2}x+N+Px^3 - P\sqrt{2}x^2+Px+Qx^2-Q\sqrt{2}x+Q$$

$$1 = x^3(M+P) + x^2\left[M\sqrt{2}+N-P\sqrt{2}+Q\right] + x\left[M+N\sqrt{2}+P-Q\sqrt{2}\right] + N+Q$$

$$M+P=0 \qquad P=-M=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(M-P)\sqrt{2}+N+Q=0 \qquad 2M\sqrt{2}+1=0 \quad M=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$M+P+\sqrt{2}(N-Q)=0$$

$$N+Q=1 \qquad Q=1-N \qquad \sqrt{2}\left[N-1+N\right]=0 \quad N=0 \quad Q=1$$

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx = I_1+I_2$$

$$I_1 = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\,\mathrm{Ln}\,|x^2-\sqrt{2}x+1| -$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\,\mathrm{Ln}\,|x^2-\sqrt{2}x+1| -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\left[\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]^2+1} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\,\mathrm{Ln}\,|x^2-\sqrt{2}x+1| -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{ar\,tg}\,\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{2}\, x + 4}{x^2 + \sqrt{2}\, x + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + 4\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}\, x + 1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}\, x + 1}\, dx + \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \int \frac{dx}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{Ln} |x^2 + \sqrt{2}\, x + 1| + \frac{3\sqrt{2}}{4} \operatorname{ar\,tg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$\boxed{11.- \qquad \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2 (x - 1)^2}}$$

Solución:

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+x+1)^2 (x-1)^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{Ax^2+Bx+C}{(x^2+x+1)(x-1)}\right] + \frac{Mx + N}{x^2+x+1} + \frac{D}{x - 1}$$

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1} + \frac{D}{x - 1}$$

$$x^3+x^2+1 = 2Ax^4+Bx^3-2Ax-B-3Ax^4-3Bx^3-3Cx^2+(Mx+N)(x^2+x+1)(x-1)^2 +$$

$$+ D(x^2 + x + 1)^2 (x - 1).$$

$$x^3+x^2+1 = 2Ax^4+Bx^3-2Ax-B-3Ax^4-3Bx^3-3Cx^2+Mx^5-Mx^4-Mx^2+Mx +$$

$$+ Nx^4-Nx^3-Nx+N+Dx^5+Dx^4+Dx^3-Dx^2-Dx-D = x^5(M+D)+x^4(2A-3A-M+N+D) +$$

$$+ x^3(B-3B-N+D)+x^2(-3C-M-D)+x(-2A+M-N-D)+(-B+N-D).$$

$M+D = 0 \qquad A = 0 \qquad D = -\frac{1}{9}$

$-A - M + N + D = 0$

$$- 2B - N + D = 1$$

$$- 3C - M - D = 1 \quad = \quad 3C = 1 \quad C = -\frac{1}{3} \qquad M = \frac{1}{9}$$

$$- 2A + M - N - D = 0$$

$$- B + N - D = 1 \qquad -3B = 2 \quad B = -\frac{2}{3} \qquad N = \frac{2}{9}$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2+x+1)^2(x-1)^2}\, dx = \frac{-\frac{2}{3} x - \frac{1}{3}}{(x^2+x+1)(x-1)} + \int \frac{\frac{1}{9} x + \frac{2}{9}}{x^2 + x + 1}\, dx +$$

$$+ \int \frac{-\frac{1}{9}}{x - 1}\, dx - \frac{2x + 1}{3(x^2+x+1)(x-1)} + \frac{1}{9} \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\, dx - \frac{1}{9} \operatorname{Ln} |x-1| + C =$$

$$= - \frac{2x + 1}{3(x^2+x+1)(x-1)} + \frac{1}{18} \operatorname{Ln} |x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{9} \operatorname{artg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} -$$

$$- \frac{1}{9} \operatorname{Ln} |x - 1| + C.$$

12.- Integrales irracionales.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 2}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{- x^2 - 2x + 2}}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$

Solución:

Vamos a resolver estas integrales descomponiendo el trinimio:

a) $x^2 + 3x - 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - 2 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4}}} = \left\{ x + \frac{3}{2} = t \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{17}{4}}} =$$

$$= \arg \text{ch} \frac{x + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{17}{4}}} + C.$$

b) $-x^2 - 2x + 2 = -(x^2 + 2x - 2) = -((x+1)^2 - 1 - 2) = 3 - (x-1)^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - (x-1)^2}} : (x - 1 = t) = \int \frac{dt}{\sqrt{3 - t^2}} = \text{ar sen} \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \text{ar sen} \frac{x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

c) $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}} : (x + \frac{1}{2} = t) = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{7}{4}}} =$$

$$= \arg \text{sh} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} + C = \arg \text{sh} \frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + C.$$

13.-

$$\int \frac{dx}{x^2 + x \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Solución:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + t$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2xt + t^2$$

$$x\,(2 - 2t) = t^2 - 2$$

$$x = \frac{t^2 - 2}{2 - 2t} \qquad dx = \frac{2t(2 - 2t) + 2\,(t^2 - 2)}{(2 - 2t)^2} dt = \frac{4t - 4t^2 + 2t^2 - 4}{(2 - 2t)^2} dt =$$

$$= \frac{4t - 2t^2 - 4}{(2 - 2t)^2} dt. \qquad x + t = \frac{t^2 - 2}{2 - 2t} + t = \frac{t^2 - 2 + 2t - 2t^2}{2 - 2t}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\dfrac{4t - 2t^2 - 4}{(2 - 2t)^2}}{\dfrac{(t^2 - 2)^2}{2 - 2t)^2} + \dfrac{t^2 - 2}{2 - 2t} \cdot \dfrac{-t^2 + 2t - 2}{2 - 2t}} \, dt =$$

$$= \int \frac{2t - t^2 - 2}{t^3 - 2t^2 - 2t + 4} \, dt$$ integral racional que resolviendola y deshaciendo el cambio resultaría:

$$\operatorname{Ln} \left[\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + \sqrt{2}} \right)^{1/\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 2} \right] + C$$

14.-

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Solución:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = x + t$$

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2xt + t^2 \qquad x\,(2 - 2t) = t^2 - 2 \qquad x = \frac{t^2 - 2}{2 - 2t}$$

$$dx = \frac{2t(2 - 2t) + 2\,(t^2 - 2)}{(2 - 2t)^2} dt = \frac{4t - 4t^2 + 2t^2 - 4}{(2 - 2t)^2} dt = \frac{4t - 2t^2 - 4}{(2 - 2t)^2} dt$$

$$x + t = \frac{t^2 - 2}{2 - 2t} + t = \frac{t^2 - 2 + 2t - 2t^2}{2 - 2t} = \frac{-t^2 + 2t - 2}{2 - 2t}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\dfrac{4t-2t^2-4}{(2-2t)^2}}{\dfrac{t^2-2}{2-2t}+\dfrac{-t^2+2t-2}{2-2t}}\,dt = \int \frac{\dfrac{4t-2t^2-4}{(2-2t)^2}}{\dfrac{2t-4}{2-2t}}\,dt =$$

$$\int \frac{4t-2t^2-4}{(2-2t)(2t-4)}\,dt = \int \frac{2t^2-4t+4}{4\,(t-2)(t-1)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+2}{(t-2)(t-1)}\,dt \quad (*)$$

$$\frac{t^2-2t+2}{(t-2)(t-1)} = \frac{t^2-2t+2}{t^2-3t+2} \; ; \qquad \begin{array}{r|l} t^2-2t+2 & t^2-3t+2 \\ \cline{2-2} -t^2+3t-2 & 1 \\ \hline t & \end{array}$$

$$(*) = \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2}\int \frac{t}{(t-1)(t-2)}\,dt = \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,|t-1| + \mathrm{Ln}|t-2| + C$$

$$\frac{t}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$$

$$t = At - 2A + Bt - B$$

$$A + B = 1 \qquad\qquad -A = 1 \qquad A = -1$$

$$-2A - B = 0 \qquad\qquad B = -2A \quad B = 2$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right| + \mathrm{Ln}\,\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x-2\right| + C$$

15.-

$$\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\, dx$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{d}{dx}\,(Ax + B)\sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{K}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$\frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = A\sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{(2x + 1)(Ax + B)}{2\sqrt{x^2 + x + 2}} + \frac{K}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$2(x^2 + 2x) = 2A\,(x^2 + x + 2) + (2x + 1)(Ax + B) + k2$$

$$2x^2 + 4x = 2Ax^2 + 2Ax + 4A + 2Ax^2 + 2Bx + Ax + B + 2k$$

$$2x^2 + 4x = x^2\,(4A) + x\,(2A + A + 2B) + (4A + B + 2k)$$

$4A = 2 \qquad\qquad A = \frac{1}{2}$

$3A + 2B = 4 \qquad\qquad 2B = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \qquad B = \frac{5}{4}$

$4A + B + 2k = 0 \qquad\qquad 2k = -\frac{5}{4} - 2 = -\frac{13}{4} \qquad K = -\frac{13}{8}$

$$I = \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)\sqrt{x^2 + x + 2} + \int \frac{-\frac{13}{8}}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)\sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{13}{8}\,\mathrm{arsh}\,\frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + C.$$

16.-

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Solución:

$$\frac{1}{x} = t \qquad x = \frac{1}{t};\ dx = -\frac{1}{t^2}\, dt$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{-\frac{1}{t^2}\cdot dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\cdot dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2t}{t^2}+\frac{2t^2}{t^2}}} =$$

$$= - \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2+2t+1}}$$

$$2t^2 + 2t + 1 = (\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} + 1 = (\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2} =$$

$$u = \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad du = \sqrt{2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arg sh } \sqrt{2}\, u =$$

$$= -\frac{1}{2} \text{ arsh } \sqrt{2}\,(\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ argsh } (2t+1) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arsh } (\frac{2}{x} + 1) + C.$$

17.-

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3x-1}}$$

Solución:

$$\frac{1}{x-1} = t \qquad x - 1 = \frac{1}{t};\; x = \frac{1}{t} + 1 = \frac{1+t}{t};\; dx = \frac{t-t-1}{t^2} = -\frac{1}{t^2}$$

$$\int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1+t}{t})^2 + 3\,\frac{1+t}{t} - 1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2+2t+3t+3t^2-t^2}{t^2}}} =$$

$$= - \int \frac{dt}{\sqrt{3t^2 + 5t + 1}}$$

$$3t^2 + 5t + 1 = (\sqrt{3}t + \frac{5}{2\sqrt{3}})^2 - \frac{25}{12} + 1 = (\sqrt{3}t + \frac{5}{2\sqrt{3}})^2 - \frac{13}{12}$$

$$u = \sqrt{3}t + \frac{5}{2\sqrt{3}} \qquad du = \sqrt{3}\ dt$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{13}{12}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{arg ch } u.\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} + C =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{arg ch } \frac{6t + 5}{\sqrt{13}} + C = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arg ch } \frac{\frac{6}{x-1} + 5}{\sqrt{13}} + C.$$

18.-

$$a) \int \frac{\sqrt{x^3}\, dx}{x + \sqrt[3]{x^2}} \qquad b) \int \frac{\sqrt{1+x}}{(1+x) + \sqrt{1+x}}\, dx$$

<u>Solución:</u>

Hacemos: $x = t^6 \quad 6 = \text{m.c.d}(\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}).$

$dx = 6t^5 dt \quad t = x^{1/6}$

Sustituyendo:

$$\int \frac{t^9 . 6t^5}{t^6 + t^4} dt = 6 \int \frac{t^{10}\ dt}{t^2 + 1} = 6 \int (t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1})\ dt =$$

$$= \frac{6\ t^9}{9} - \frac{6\ t^7}{7} + \frac{6\ t^5}{5} - \frac{6\ t^3}{3} + 6t - 6 \text{ artg } t + C =$$

$$= \frac{6x^{3/2}}{9} - \frac{6x^{7/6}}{7} + \frac{6x^{5/6}}{5} - \frac{6x^{1/2}}{3} + 6x^{1/6} - \text{artg } x^{1/6} + C.$$

b) Hacemos $1 + x = t^2$; $dx = 2t\ dt,$

Sustituyendo:

$$\int \frac{t.2t\ dt}{t^2 + t} = 2 \int \frac{t\ dt}{t + 1} = 2 \int (1 - \frac{1}{t + 1})\ dt =$$

$$= 2t - 2Ln\ |t + 1| + C = 2\sqrt{1 + x} - 2\ Ln\ |\sqrt{1 + x} + 1| + C$$

19.- a) $\displaystyle\int \frac{(1 + \sqrt{x})^{3/2}}{\sqrt{x}}\ dx$ b) $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}\ (1 + x^{3/2})^2\ dx$

Solución:

a) $$\int \frac{(1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\ dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\ (1 + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}\ dx.$$

Haciendo:

$$x^{\frac{1}{2}} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\ dt.$$

Sustituyendo:

$$\int t^{-1}\ (1 + t)^{3/2}\ 2t\ dt = 2 \int (1 + t)^{3/2}\ dt = 2\ \frac{(1 + t)^{5/2}}{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{4}{5}\ (1 + t)^{5/2} + C = \frac{4}{5}\ (1 + x^{1/2})^{5/2} + C.$$

b) $$\int x^{-2/3}\ (1 + x^{3/2})^2\ dx.$$

Haciendo:

$$x^{3/2} = t\ ; \quad x = t^{2/3}\ ; \quad x^{-2/3} = t^{-4/9}\ ; \quad dx = \frac{2}{3}\ t^{-1/3}\ dt$$

Sustituyendo:

$$\int t^{-4/9}\ (1 + t)^2\ \frac{2}{3}\ t^{-1/3} = \frac{2}{3} \int t^{-7/9}\ (1+t)^2\ dt =$$

$$= \frac{2}{3} \int t^{-7/9}\ (1 + t^2 + 2t)\ dt = \frac{2}{3} \int (t^{-7/9} + t^{11/9} + 2t^{2/9})dt$$

$$\frac{2}{3}\ \frac{t^{2/9}}{\frac{2}{9}} + \frac{2}{3}\ \frac{t^{20/9}}{\frac{20}{9}} + \frac{4}{3}\ \frac{t^{11/9}}{\frac{11}{9}} + C = 3x^{1/3} + \frac{3}{10}\ x^{10/3} +$$

$$+ \frac{12}{11}\ x^{11/6} + C.$$

20.- $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}\ (2 + x^{1/2})^{-2/3}\ dx.$

Solución:

Hacemos:

$$x^{1/2} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\ dt.$$

Sustituyendo:

$$\int t^{-4/3}\ (2 + t)^{-2/3}\ 2t\ dt = 2 \int t^{-1/3}(2 + t)^{-2/3}\ dt =$$

$$= 2 \int t^{-1/3}\ t^{-2/3}\left(\frac{2 + t}{t}\right)^{-2/3} dt = 2 \int t^{-1}\left(\frac{2+t}{t}\right)^{-2/3} dt$$

Haciendo:

$$\frac{2 + t}{t} = z^3 \qquad 2 + t = tz^3 \quad t(z^3 - 1) = 2 \qquad t = \frac{2}{z^3 - 1}$$

Sustituyendo Resulta:

$$dt = -\frac{2 \cdot 3z^2}{(z^3 - 1)^2}\ dz$$

$$2 \int \frac{z^3 - 1}{2} \cdot z^{-2}\left(-\frac{2 \cdot 3z^2}{(z^3 - 1)^2}\right)dz = -6 \int \frac{dz}{z^3 - 1} = -6\ I =$$

$$-6I = -6\int \frac{dz}{z^3 - 1} = -2.\int \frac{dz}{z - 1} + \int \frac{2z + 4}{z^2 + z + 1}\ dz =$$

$$= -2\text{Ln}|z-1| + \text{Ln}|z^2+z+1| + 2\sqrt{3}\ \text{ar tg}\ \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\frac{1}{z^3 - 1} = \frac{A}{z - 1} + \frac{Bz + D}{z^2 + z + 1}$$

$$1 = Az^2 + Az + A + Bz^2 + Dz - Bz - D.$$

$$\begin{array}{lcl} A + B = 0 & & A = 1/3 \\ A + D - B = 0 & \Rightarrow & B = -1/3 \\ A - D = 1 & & D = -2/3 \end{array}$$

$$\int \frac{2z+4}{z^2+z+1} = \text{Ln}\,|z^2+z+1| + 3.\int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \text{Ln}|z^2+z+1| + 2\sqrt{3}\,\text{artg}\,\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Si deshacemos los cambios tendremos:

$$\int x^{-2/3}(2+x^{1/2})^{-2/3}dx = -2.\,\text{Ln}\,\left|\sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} - 1\right| + \text{Ln}\left|\sqrt[3]{\left(\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} + 1\right| +$$

$$+ 2\sqrt{3}.\text{artg}\,\frac{2\sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{3}}$$

21.- a) $\int senx\, cos^2x\, dx$ b) $\int \frac{dx}{2+sen^2x}$ c) $\int \frac{dx}{2senx+cosx}$

Solución:

a) Haciendo $cosx = t$; $-senx\, dx = dt$ y por tanto:

$$\int senx\, cos^2 x\, dx = -\int dt\, t^2 = \frac{t^3}{3} + C = -\frac{cos^3 x}{3} + C.$$

b) Hacemos $tgx = t$ y resulta $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $sen^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{2+sen^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3t^2+2} = \qquad \begin{array}{l} u = \sqrt{3}t \\ du = \sqrt{3}\,dt \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{du}{\sqrt{2}}}{(\frac{u}{\sqrt{2}})^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ art } \frac{u}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ artg } \frac{\sqrt{3} \text{ tgx}}{\sqrt{2}} + C.$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\text{senx} + \cos x}$

Hacemos $\text{tg } \frac{x}{2} = t$ $\qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2} \quad \text{senx} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{2 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4t + 1 - t^2} = -2 \int \frac{dt}{t^2-4t-1} = -2 \int \frac{dt}{(t-2)^2-5}$$

$$t - 2 = u$$

$$-2 \int \frac{du}{u^2 - 5} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} \text{ Ln } |u - \sqrt{5}| + \frac{2}{2\sqrt{5}} \text{ Ln } |u + \sqrt{5}|$$

$$\frac{1}{u^2 - 5} = \frac{A}{u - \sqrt{5}} + \frac{B}{u + \sqrt{5}}$$

$$1 = A\,(u + \sqrt{5}) + B\,(u - \sqrt{5})$$

$$A + B = 0 \qquad\qquad A = -B$$

$$\sqrt{5}\,(A - B) = 1 \qquad 2A\sqrt{5} = 1 \qquad A = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\int \frac{dx}{2\text{senx} + \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ Ln } |t - 2 - \sqrt{5}| + \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ Ln } |t-2+ \sqrt{5}| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ Ln} \left| \frac{\text{tg } \frac{x}{2} - 2 + \sqrt{5}}{\text{tg } \frac{x}{2} - 2 - \sqrt{5}} \right| + C.$$

22.- a) $\int sen\ 2x\ sen\ 3x\ dx$ b) $\int senx\ cos2x\ dx$

Solución:

Aplicando las formulas de trigonometria:

$$sen2x\ sen3x = \frac{1}{2}\left[cos(2x-3x) - cos\ (2x+3x)\right] = \frac{1}{2}\left[cos(-x) - cos\ 5x\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ (cosx - cos\ 5x)$$

$$a)\ \frac{1}{2}\int (cosx - cos\ 5x)\ dx = \frac{1}{2}\ senx - \frac{1}{2}\ \frac{sen\ 5x}{5} + C.$$

b) $\int senx\ cos\ 2x\ dx.$

$$senx\ cos2x = \frac{1}{2}\left[sen(x+2x) + sen(x-2x)\right] = \frac{1}{2}\left[sen\ 3x + sen(-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ (sen\ 3x - senx)$$

$$\int (senx\ cos2x)\ dx = \frac{1}{2}\int (sen\ 3x - senx)\ dx = cosx - \frac{cos\ 3x}{3} + C.$$

Nota:

En estos problemas hemos considerado los métodos generales,lo cual no quiere decir que, algunas integrales puedan resolverse de otra forma y de manera más rapida. Veamos algunos ejemplos de esto.

23.- $\int cos^2x\ dx.$

Solución:

El método general sería:

$$tgx = t \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad cos^2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

que al sustituir:

$$\int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1-t)^2 dt}{(1+t^2)^2}$$

que debemos resolver aplicando el método de Hermite. Sin embargo resulta más corto utilizando el método de integración por partes.

$$\int \cos^2 x dx = \begin{cases} u = \cos x & du = -\operatorname{sen} x\, dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \operatorname{sen} x \end{cases} =$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x\, dx \qquad \int \cos^2 x dx = \frac{x + \cos x \operatorname{sen} x}{2}$$

y también podiamos considerar:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

y por tanto la integral es inmediata.

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

24.- $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx.$

Solución:

El método general sería:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$$

pero resulta más breve multiplicar y dividir por $\sqrt{x-1}$ con lo que:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \operatorname{ar} \operatorname{sen} x + C.$$

25.- $$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 5}{(x-1)^5}$$

Solución:

El método general sería aplicar Hermite pero en este caso más resultaría un polinomio de coeficiente indeterminado de grado 3º que parece - algo largo. Otro método más rapido consiste en desarrollar el polinomio en potencia de x - 1 por simple división siendo:

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 20(x-1) + 4$$

con lo que la integral se convierte en:

$$\int \frac{dx}{x-1} + 7\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 17\int \frac{dx}{(x-1)^3} + 20\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^5}$$

que son todas inmediatas.

$$I = \text{Ln}\,(x-1) - 7\,\frac{1}{x-1} - \frac{17}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{20}{3}\,\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^4} + C.$$

26.- $$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$$

Solución:

El método general sería:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

Sin embargo teniendo en cuenta que:

$$\cos x + \cos a = 2\cos\frac{x+a}{2}\,\cos\frac{x-a}{2}$$

$$\text{sen } a = \text{sen } \left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right) = \text{sen } \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} -$$

$$- \text{sen } \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

Multiplicando y dividiendo por "sena" en la integral se tiene:

$$\frac{1}{\text{sen } a} \int \frac{\text{sen} \frac{x+a}{2}}{2 \cos \frac{x+a}{2}} dx + \frac{1}{\text{sen } a} \int \frac{- \text{sen } \frac{x-a}{2}}{2 \cos \frac{x-a}{2}} =$$

$$- \frac{1}{\text{sen } a} \quad \text{Ln}\left|\frac{\cos x + a}{2}\right| + \frac{1}{\text{sen } a} \text{Ln}\left|\frac{\cos x - a}{2}\right| + C =$$

$$\frac{1}{\text{sen } a} \text{ Ln } \left|\frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}}\right| + C.$$

Solución:

a): $u = x;$ $\quad dv = \text{sen}x.dx$

$du = dx$ $\quad v = - \cos x$

$$\int_0^{\pi} x.\text{sen}x.dx = -x.\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x.dx = -\pi.\cos\pi + 0.\cos 0 + \text{sen}x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

b) Hacemos el cambio de variable: $t = \cos x$; $dt = - \text{sen}x.dx$, así:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 5\cos x + 6}.\text{sen}x.dx = -\int_1^0 \frac{t^2}{t^2 + 5t + 6} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 5t + 6} dt =$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{t+2} - \frac{9}{t+3}\right).dt = t + 4\text{Ln}(t+2) - 9\text{Ln}(t+3)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 + 13\text{Ln}3 - 22\text{Ln}2.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Resolver las siguientes integrales:

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

2) $\int \sqrt{x^2 + 3x + 2}\, dx$

3) $\int \frac{x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$

4) $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\, e^x\, dx$

5) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}}$

7) $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$

8) $\int \frac{2x + 1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

9) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

10) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 1}}$

11) $\int \operatorname{ar\,tg} x\, dx$

12) $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

13) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x - 2)^4}\, dx$

14) $\int \cos x \operatorname{sen} 3x\, dx$

15) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{2x - x^2}}$

16) $\int x^{1/3} (x + \sqrt[4]{x^3})^{-1}\, dx$

17) $\int \frac{(2 + 3x^{2/3})^2}{x^{1/3}}\, dx$

18) $\int x^{-3/5} (2 + 3x^{1/5})^{1/2}\, dx$

19) $\int x^2 (2 + x^4)^{-3/4}\, dx$

20) $\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2 (x - 1)}\, dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 + 3}}$

22) $\int \frac{dx}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}$

23) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$

24) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

25) $\int \sqrt{4+\operatorname{tg}^2 x}\, dx$

$\operatorname{tg}x = 2\operatorname{tg}$

26) $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$

27) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x \operatorname{ch}x}$

28) $\int \frac{x\, Lx}{\sqrt{(x^2-1)}}\, dx$

29) $\int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{sen} x}$

30) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

$\frac{1}{x^2} = y.$

Soluciones:

1.- $\operatorname{Ln}\frac{x-2}{x-1} + C.$

2.- $\frac{e^{2u} - e^{-2u} - 4u}{2} + C.$ Siendo $u = \operatorname{argch}2(x + \frac{3}{2})$

3.- $\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2 - 1) + C$

4.- $\frac{e^x . \operatorname{sen}x}{1+\cos x} + C$

5.- $\frac{1}{\cos a} \operatorname{Ln}\frac{\cos\frac{a-x}{2}}{\cos\frac{a+x}{2}} + C$

6.- $-\frac{1}{4}\operatorname{Argsh}x - \frac{1}{8}\operatorname{sh}(2\operatorname{Argch}x) + C$

7.- $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{artg}(\frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}.x)}{\sqrt{2}}) + C$

8.- $2\operatorname{Argsh}x - \operatorname{Argsh}(1/x) + C$

9.- $-\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|\sqrt{x^2+1}-x| + C$

10.- $(\frac{1}{4}x - \frac{9}{16})\sqrt{2x^2+3x+1} + \frac{67}{32\sqrt{2}}(\operatorname{Argch}(4x+3)) + C$

11.- $x\operatorname{artg}x - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+x^2) + C.$

12.- $\frac{1}{2}x - \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + C.$

13.- $\mathrm{Ln}|x-2| - \frac{8}{x-2} - \frac{10}{(x-2)^2} - \frac{16}{3(x-2)^3} + C.$

14.- $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

15.- $\mathrm{Ln}\dfrac{\sqrt{\frac{x}{2-x}} - 1}{\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1} - ½\ \mathrm{artg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C.$

16.- $3x^{1/3} - 12x^{1/12} + 6\mathrm{Ln}|x^{1/6} - x^{1/12} + 1| - 12/\sqrt{3}\ .\mathrm{artg}\frac{2x^{1/12} - 1}{\sqrt{3}} + C$

17.- $6x^{2/3} + 9/2.x^2 + 9x^{4/3} + C$

18.- $2/3\ \sqrt{(2 + 3x^{1/5})^5} - 20/9\ \sqrt{(2 + 3x^{1/5})^3} + C$

19.- $\mathrm{Ln}\dfrac{\sqrt[4]{2 + x^4} + x}{\sqrt[4]{2 + x^4} - x} + 2\mathrm{artg}\sqrt[4]{\frac{2+x^4}{x^4}} + C$

20.- $-\frac{3}{9}\cdot\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{9}\mathrm{Ln}|x^2+x+1| - 4\sqrt{3}/9\ \mathrm{artg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + 2/9\ \mathrm{Ln}|x-1| + C.$

21.- $\mathrm{arsen}((2x-3)/\sqrt{21}) + C$

22.- $-½\ \mathrm{Ln}|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + ½\ \mathrm{artg}x + C.$

23.- $\mathrm{arsen}x - \sqrt{1 - x^2} + C$

24.- $-\mathrm{sen}x + 2\mathrm{artg}(\mathrm{sen}x) + C.$

25.- $\mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{sen}(\mathrm{artg}\frac{\mathrm{tg}x}{2})}{1 - \mathrm{sen}(\mathrm{artg}\frac{\mathrm{tg}x}{2})}} + \sqrt{3}.\mathrm{artg}(\sqrt{3}.\ \mathrm{artg}\frac{\mathrm{tg}x}{2}) + C$

26.- $½\ \mathrm{Argsh}x + \frac{\mathrm{sh}(2\mathrm{Argsh}x)}{4} + C$

27.- $\mathrm{Ln}\ \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + C.$

28.- $\sqrt{x^2 - 1}\ .\ \mathrm{Ln}x - \mathrm{sh}(\mathrm{Argch}x) - \mathrm{artg}(\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}x)) + C$

29.- $-\mathrm{Ln}|1 - \mathrm{tg}^2(\frac{x}{2}) + 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}| + \sqrt{2}/2\ \mathrm{Ln}\dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2} - \mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1} + C$

30.- $-½\ \mathrm{arsen}(1/x^2) + C$

LECCION: 10

INTEGRAL DEFINIDA

<u>Definición</u>: Sea $f(x)$ una función acotada en $[a, b]$.

Sea $\mathcal{P} = \{P;\ P$ es una partición de $[a, b]\}$

(es decir: P es: un número finito de puntos del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_n = b$$

Definimos ahora:

$$m_i = \min \{f(x);\quad x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \max \{f(x);\quad x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Se definen, para cada partición dos sumas:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

y, si consideramos todas las particiones, tendremos dos conjuntos de números reales: $\mathbb{L} = \{L(f,P);\ P \in \mathcal{P}\}$; $\mathbb{U} = \{U(f,P);\ P \in \mathcal{P}\}$

de tal forma que es: $L(f,P) \leq U(f,P')$ para toda partición P, P'.

Se dice que $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$, existen particiones P, P', tales que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Esto significa que existe un único valor real, I, verificando:

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P'), \text{ para toda } P, P'.$$

A tal número real, I, se le denomina integral de la función, f, extendida al intervalo $[a, b]$ y se representa por:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Propiedades</u>:

a) Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable.

b) $\int_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$

c) Si $c \in [a, b]$, se verifica: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$

d) $\int_a^a f(x)dx = 0$

e) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

f) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

g) Si "f" es integrable en $[a, b]$ y es $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Teorema de la media: Sea $f(x)$ una función integrable en $[a, b]$, si son m y M el mínimo y máximo de la función en el intervalo, se verifica:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

si, además, $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces existe un $x_o \in [a, b]$ tal que: $f(x_o) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Teorema fundamental del Cálculo: Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y $x \in [a, b]$. Si definimos: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

Regle de Barrow: Si $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

Integración por partes:

$$\int_a^b u.dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v.du$$

Cambio de variables: Sea $h: [c, d] \longrightarrow [a, b]$ es biyectiva:

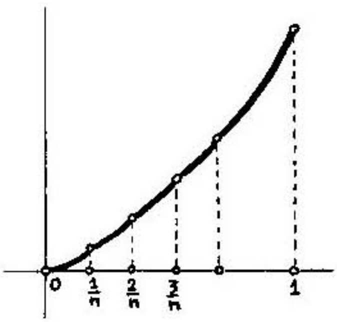
$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(h(t)).|h'(t)|.dt$$

EJERCICIOS RESUELTOS:

1.- Sea $f(x) = x^2$. Formar las sumas inferiores y superiores para particiones del intervalo $[0, 1]$ en subintervalos de igual longitud. Usarlo para calcular: $\int_0^1 x^2dx$

Solución:

Sean $x_o = 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$ puntos del intervalo



$[0, 1]$. Si todos los subintervalos deben medir lo mismo, será: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, y, por lo tanto:

$x_o = 0;\quad x_1 = \frac{1}{n};\ x_2 = \frac{2}{n};\ \dots\ x_n = 1 = \frac{n}{n}$

Por otra parte, es:

$$m_i = \text{mín}\,\{f(x) = x^2;\ x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\} = (\frac{i-1}{n})^2$$

$$M_i = \text{máx}\,\{f(x) = x^2;\ x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\} = (\frac{i}{n})^2$$

Así: $L(f,P) = (\frac{0}{n})^2.\frac{1}{n} + (\frac{1}{n})^2.\frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^2.\frac{1}{n} + \dots + (\frac{n-1}{n})^2.\frac{1}{n}$

$U(f,P) = (\frac{1}{n})^2.\frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^2.\frac{1}{n} + (\frac{3}{n})^2.\frac{1}{n} + \dots + (\frac{n}{n})^2.\frac{1}{n}$

Luego:

$$L(f,P) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}$$

$$U(f,P) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2}{n^3}$$

Veamos ahora la segunda parte del ejercicio:

Si existe $\int_0^1 x^2dx$ deberá ser:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots\dots + (n-1)^2}{n^3} \leq \int_0^1 x^2dx \leq \frac{1^2 + 2^2 + \dots\dots + n^2}{n^3} \quad \text{para todo } n \in N$$

Entonces, será:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

y, aplicando el criterio de Stoltz, ambos límites coinciden y valen $\frac{1}{3}$.

luego: $$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2.- Sea $f(x)$ una función monotona y acotada en $[a, b]$. Demostrar que es integrable en dicho intervalo.

Solución:

Supongamos que la función $f(x)$ es creciente (el razonamiento seria similar en el caso de que la función sea decreciente).

Tomemos una partición de $[a, b]$ en subintervalos de igual medida

Así: $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$; $x_0 = a$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ para i + 1,2,...,n

Por lo tanto:

$$L(f,P) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}); \quad U(f,P) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

Entonces, se tiene:

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) - \sum_{i=0}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(a + n\frac{b-a}{n}) - f(a)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Ahora bien, $|f(x)| < M$ para todo x de $[a, b]$, luego:

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{b-a}{n}.2M$$

y si $\epsilon > 0$, existe "p" tal que: $\frac{(b-a)2M}{p} < \epsilon$ y para $n > p$

es $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, por lo tanto f es integrable.

3.- Demostrar que si $f(x)$ es una función par:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Idem, si $f(x)$ es impar:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Solución:

$f(x)$ es par $\Rightarrow$ $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Haciendo $x = -t$, $dx = -dt$, y por lo tanto:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt, \quad \text{luego:}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Si $f(x)$ es impar, entonces: $f(-x) = -f(x)$, y con el mismo cambio obtendriamos:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt$$

y tendriamos, descomponiendo en dos la integral exactamente igual que en el caso anterior:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

4.- Calcular $F'(x)$, siendo: $F(x) = \int_{1}^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$, con $x > 1$.

Solución:

La función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en cualquier intervalo: $[1, a]$.

Luego, si llamamos: $G(u) = \int_{1}^{u} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$, será, aplicando el Teorema fundamental: $G'(u) = \frac{\operatorname{sen} u}{u}$; ahora bien, $F(x) = G(u)$ con $u = x^2$

y es: $F'(x) = \frac{d(G(u))}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\operatorname{sen} u}{u} \cdot 2x = \frac{2\operatorname{sen} x^2}{x}$.

5.- Calcular $F''(x)$, siendo:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \left(\int_{y^2}^{2} \frac{e^t}{t}.dt\right)dy \ ; \quad y>2; \quad x>1$$

Solución:

De la misma forma que en el ejercicio anterior, sea:

$$h(y) = \int_{y^2}^{2} \frac{e^t}{t}dt$$

h(y) es continua puesto que es derivable. Así la función F(x) es:

$$F(x) = \int_1^{x^2} h(y)dy \quad \Rightarrow \quad F'(x) = h(x^2).2x = 2x\int_{x^4}^{2} \frac{e^t}{t}\,dt = -2x\int_2^{x^4} \frac{e^t}{t}dt$$

y por tanto: $\quad F''(x) = -\dfrac{e^{x^4}}{x^4}.4x^3.2x = -8e^{x^4}.$

6.- Determinar una función continua, $f(x)$, y una constante, C, tales que:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C \qquad (1)$$

Solución:

Derivando (1): $\quad f(x) = -x^2 f(x) + 2x^{15} + 2x^{17} =$

$$f(x).(1+x^2) = 2x^{15} + 2x^{17}; \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2x^{15}+2x^{17}}{1+x^2} = 2x^{15}$$

Así: $\quad \displaystyle\int_0^x 2t^{15}dt = \int_x^1 2t^{17}dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C \quad \Rightarrow$

$$2\frac{t^{16}}{16}\Bigg|_0^x = 2\frac{t^{18}}{18}\Bigg|_x^1 + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^{16}}{8} = \frac{1}{9} - \frac{x^{18}}{9} + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C \quad = \quad C = -\frac{1}{9}$$

7.- Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x.\operatorname{sen}x.dx \qquad$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 5\cos x + 6}.\operatorname{sen}x.dx$

Solución:

a): $u = x;$ $dv = \text{sen}x.dx$

$du = dx$ $v = -\cos x$

$$\int_0^{\pi} x.\text{sen}x.dx = -x.\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x.dx = -\pi.\cos\pi + 0.\cos 0 + \text{sen}x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

b) Hacemos el cambio de variable: $t = \cos x$; $dt = -\text{sen}x.dx$, así:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 5\cos x + 6}.\text{sen}x.dx = -\int_1^0 \frac{t^2}{t^2 + 5t + 6}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 5t + 6}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{t+2} - \frac{9}{t+3}\right).dt = t + 4\text{Ln}(t+2) - 9\text{Ln}(t+3)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 + 13\text{Ln}3 - 22\text{Ln}2.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

8.- Escribir las sumas superiores e inferiores correspondientes a la función: $f(x) = x^3$ en $[0, 1]$, cuando se divide dicho intervalo en partes iguales. Usarlo para calcular $\int_0^1 x^3 dx$.

Solución: $L(f,P) = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3$; $U(f,P) = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$. 1/4.

9.- Demostrar que toda función continua en $[a, b]$ es integrable en dicho intervalo.

10.- Si $f(x)$ es una función integrable en todo intervalo de R, y es $f(x + a) = f(x)$, para todo $x \in R$ (función periodica de periodo "a").

Demostrar que: $\int_0^a f(x).dx = \int_b^{b+a} f(x).dx$ para todo "b" de R.

11.- Calcular, sin hallar la integral, la derivada de la función:

$$F(x) = \int_x^{x^2} (t^2 + \text{sen}t).dt$$

Solución: $F'(x) = 2x^5 - x^2 + 2x\,\text{sen}x^2 - \text{sen}x.$

12.- Hallar una función $f(x)$ y una constante "C", verificando:

$$\int_1^x f(t)dt + \int_0^x t.f(t).dt = \text{artg}x + \tfrac{1}{2}\text{Ln}(1 + x^2) + C$$

Solución: $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ $C = -\frac{\pi}{4}$

13.- Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 \text{artg}x.dx$ b) $\int_{\frac{e+1}{1-e}}^{\frac{e^2+1}{1-e^2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

donde: $f(x) = \text{Ln}(x^2-1)$

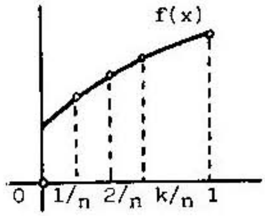
Solución: a) $\frac{\pi}{4} - \text{Ln}2$; b) $\frac{1 - e^2 + 2e}{1 - e^2}$

LECCIÓN. 11

APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL.

De las múltiples aplicaciones geométricas, físicas o técnicas del cálculo integral en una variable, vamos a dar una muestra que creemos representativa de la potencia de la integración como herramienta imprescindible para el técnico.

A) Cálculo de límites.



A partir de la definición de la integral definida podemos escribir para una partición como la de la figura:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

ó también:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

B) Áreas Planas.

Recordando la interpretación geométrica de la integral definida, el área del trapezoide formado por el eje Ox, dos abcisas $x = a$; $x = b$ y un arco de curva $f(x)$, no es más que:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

A partir de esta interpretación y por variación de la misma, podemos encontrar distintas expresiones, según la curva y según el tipo de recinto.

Hay que recordar que el área es un valor estrictamente positivo y por lo tanto, deberemos tomar valores absolutos donde convenga.

Hay que hacer notar que la representación gráfica del recinto cuya área hay que calcular, es muchas veces imprescindible.

C) Longitud de un arco de curva:

Recordando que el elemento diferencial de arco plano $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, la longitud de un arco de curva entre dos extremos A,B, se expresa como:

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$ dando la curva en cartesianas $y = y(x)$.

$$L = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt,$$ cuando la curva se expresa en paramétricas. $x = x(t),\ y = y(t)$.

$$L = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\theta$$, en una curva expresada en polares $\rho = \rho(\theta)$

Para una curva alabeada en paramétricas $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

$$L = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

D) Áreas y volúmenes de revolución.

Tomando como base el eje Ox, el área engendrada por un arco de curva comprendido entre las abcisas x_0, x_1, al girar alrededor de dicho eje es:

$$\Omega = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad d\Omega = 2\pi\ y\ ds$$

siendo ds el elemento diferencial de arco e "y" el radio giro del elemento ds.

Del mismo modo, el volumen engendrado por un área plana limitada por el eje Ox, un arco $y = f(x)$ y dos abcisas x_0, x_1 al girar alrededor del eje Ox:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 \, dx$$

donde se ha tomado como elemento diferencial de volumen:

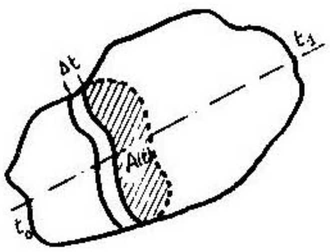
$$dv = \pi \, y^2 \, dx$$

el volumen de un disco de espesor "dx" y radio de giro "y".

A partir de estas expresiones básicas, podemos calcular áreas y volúmenes engendrados por giros alrededor de ejes cualesquiera.

En los ejercicios que a continuación se detallan, veremos la resolución de estos casos especiales.

E) Áreas y volúmenes expresables por una sola variable.



Haciendo referencia a la figura, si es factible expresar una sección variable del volumen de un cuerpo, mediante una sola variable A(t), el volumen de este sólido podrá expresarse mediante:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \Sigma \, A(t) \Delta t = \int_{t_0}^{t_1} A(t) \, dt.$$

De igual modo si Ω (t) , es un elemento de superficie, expresado por la variable "t",

$$\Omega = \int_{t_0}^{t_1} \Omega(t) \, dt$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\dots+\frac{1}{n^2+n^2}\right]$$

Solución:

El límite pedido podemos escribirlo como:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\dots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

$$L = \left[\text{arc tg } x\right]_0^1 = \text{arc tg } 1 - 0 = \frac{\pi}{4}$$

2.- Calcular:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$$

Solución:

Operando den+-- de los radicandos:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-0}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n-1}{n})^2}}\right]$$

$$L = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arc sen } x\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

3.- Calcular:

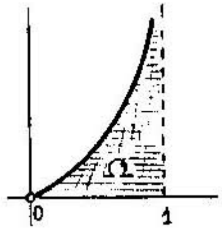
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n-1)$$

Solución:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}\right] = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

> *4.- Hallar el área encerrada por el eje Ox la curva:*
>
> $$y = \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^4}}$$
>
> *y su asíntota* $x = 1$.

Solución:



$$\Omega = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^1 x^5\,(1-x^4)^{-1/2}\,dx$$

Haciendo el cambio $x^4 = t$, la convertimos en Euleriana.

$$x^4 = t\ ;\ x = t^{1/4} \longrightarrow dx = \frac{1}{4}\,t^{-3/4}\,dt$$

$$\Omega = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{1/2}\,(1-t)^{-1/2}\,dt = \frac{1}{4}\,\beta\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}$$

> *5.- hallar el área limitada por la curva:*
>
> $$y = 6\,x^2 - x^3$$
>
> *y el eje Ox.*

Solución:

Calculemos primeramente los puntos de corte de la curva con el eje Ox:

$$6x^2 - x^3 = 0\ ;\ x^2(6-x) = 0;\ x_0 = 0\ ;x_1 = 6$$

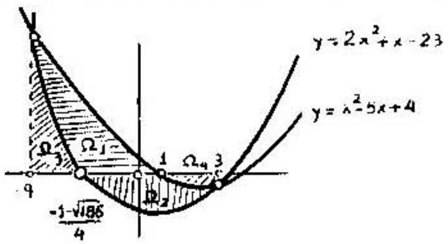
$$\Omega = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = \frac{6\,x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^6 = 108$$

> *6.- Calcular el área limitada por las curvas:*
>
> $$y = x^2 - 5x + 4\ ; \qquad y = 2x^2 + x - 23$$

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas dos curvas:

$$2x^2 + x - 23 = x^2 - 5x + 4 \longrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \longrightarrow x_0 = -9;\quad x_1 = 3$$



$$\Omega = [\Omega_1] + [\Omega_2]$$

$$\Omega_1 = (\Omega_1 + \Omega_3) - \Omega_3$$

$$\Omega_2 = (\Omega_2 + \Omega_4) - \Omega_4$$

$$\left(\Omega_1 + \Omega_3\right) = \int_{-9}^{1} (x^2 - 5x + 4)\,dx = 483{,}33$$

$$\Omega_3 = \int_{-9}^{\frac{-1-\sqrt{185}}{4}} (2x^2 + x - 23)\,dx = 296{,}69\ ;\quad \Omega_1 = 186{,}64$$

$$\Omega_2 + \Omega_4 = \int_{\frac{-1-\sqrt{185}}{4}}^{3} (2x^2 + x - 23)\,dx = |-104{,}69|;\ \Omega_2 + \Omega_4 = 104{,}69$$

$$\Omega_4 = \int_1^3 (x^2 - 5x + 4)dx = |-3,33|,\ \Omega_4 = 3,33$$

$$\Omega_2 = 101.36 \quad y \quad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 = 186,64 + 101.36$$

$$\Omega = 288$$

7.- Área limitada por las curvas:

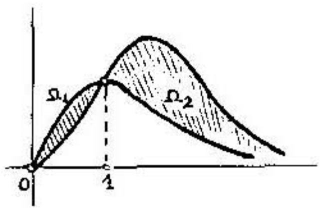
$$y = xe^{-x} \quad ; \qquad y = x^2\, e^{-x}$$

Solución:

Calculemos los puntos de corte de ambas curvas:

$$xe^{-x} = x^2\, e^{-x} \longrightarrow x^2 - x = 0 \longrightarrow x_0 = 0 \quad x_1 = 1$$

Sus gráficas son:



$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\Omega_1 = \int_0^1 (xe^{-x} - x^2 e^{-x})dx$$

$$\Omega_2 = \int_1^{\infty} (x^2 e^{-x} - xe^{-x})dx$$

Integrando por partes:

$$\Omega_1 = \left[x^2\, e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} \right]_0^1 = \frac{3}{e} - 1$$

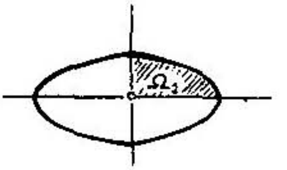
$$\Omega_2 = \left[-x^2\, e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} \right]_1^{\infty} = 0 + \frac{3}{e}\ ; \quad \Omega = \frac{6}{e} - 1$$

8.- Área encerrada por la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución:

Por ser el recinto simétrico:



$$\Omega = 4\ \Omega_1.$$

Despejando "y" en la ecuación de la elipse:

$$y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\Omega = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

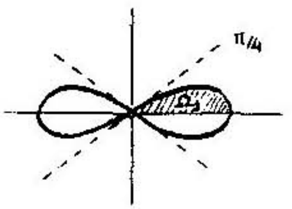
Haciendo el cambio x = a sent.

$$\Omega = 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\cdot a\cdot \cos t\ dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \pi\ ab.$$

9.- Área encerrada por la curva:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

Solución:



Observando la representación de esta curva:

$$\Omega = 4\ \Omega_1$$

Recordando la expresión del área en coordenadas polares:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2\ d\theta$$

podemos escribir:

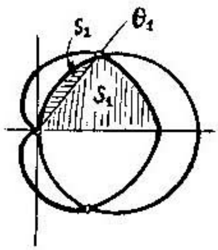
$$\Omega = 4\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\ d\theta = a^2$$

> *10.- Área común a las curvas:*
>
> $$\rho = 3\cos\theta \quad ; \quad \rho = 1 + \cos\theta$$

Solución:

$\rho = 3\cos\theta$: es una circunferencia de centro (1,5,0) y radio 1,5

$\rho = 1 + \cos\theta$: es una cardioide Representando ambas curvas.



El valor del ángulo θ_1, es:

$3\cos\theta_1 = 1+\cos\theta_1 \rightarrow 2\cos\theta_1 = 1$, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$

Por simetría:

$$S = 2(s_1 + s_2)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

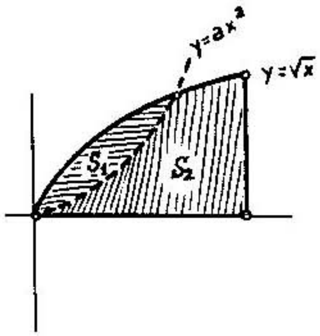
$$S = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{7\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

> *11.- Calcular "a" en $y = ax^2$, para que esta curva divida en dos partes de igual área al recinto limitado por $x = 1$, $y = 0$, - $y = \sqrt{x}$.*

Solución:

$$S_1 = \frac{1}{2} S \quad ; \quad S = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$$

$$S_1 = \frac{1}{3}$$



El punto x_0 común a ambas curvas:

$$a x_0^2 = \sqrt{x_0} \longrightarrow x_0 = a^{-2/3}$$

$$S_1 = \int_0^{x_0} (\sqrt{x} - a x^2)\, dx = \frac{1}{3}$$

Integrando:

$$\frac{2}{3} x_0^{3/2} - \frac{a}{3} x_0^3 = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo x_0 por su valor:

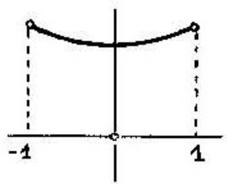
$$2a^{-1} - a^{-1} = 1 \ ; \ a = 1$$

12.- Calcular la longitud de un arco de catenaria, de ecuación:

$$y = chx$$

entre los puntos de abcisas $x = -1$; $x = 1$.

Solución:



Expresando la curva en cartesianas:

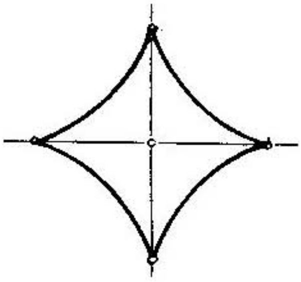
$$y = chx \quad ; \quad y' = shx$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (shx)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} chx\, dx = \Big[shx\Big]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e}$$

13.- Calcular la longitud de la astroide de ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Solución:



Vamos a escribir esta ecuación tomando como parámetro "t":

$$x = a \cos^3 t \quad ; \quad y = a\,\text{sen}^3 t$$

Al ser la curva simétrica variando "t" entre $0, \pi/_2$, se recorre un cuarto de la longitud Total:

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt \qquad \begin{array}{l} x' = -3a \cos^2 t\ \text{sen}t \\ y' = 3a\ \text{sen}^2 t \cos t \end{array}$$

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 \text{sen}^2 t + 9a^2 \text{sen}^4 t \cos^2 t}\ dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a \sqrt{\cos^2 t\,\text{sen}^2 (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}\ dt$$

$$L = 12a\int_0^{\pi/2} \cos t\ \text{sen}t\ dt = 12a \left[\frac{\text{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 6a$$

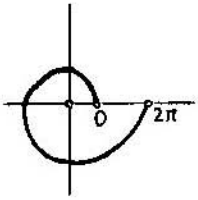
14.- Calcular la longitud del arco de la espiral logarítmica:

$$\rho = e^{k\theta}$$

comprendido entre $\theta = 0, \quad \theta = 2\pi$.

Solución:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\ d\theta \qquad \begin{array}{l} \rho = e^{k\theta} \\ \rho' = ke^{k\theta} \end{array}$$



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2k\theta} + k^2 e^{2k\theta}}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + k^2}\; e^{k\theta}\, d\theta .$$

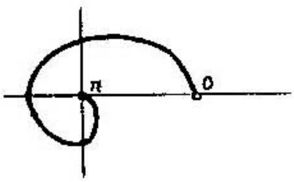
$$L = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k} \left[e^{k\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{k} \left[e^{2k\pi} - 1\right]$$

15.- Longitud de la curva:

$$\rho = a \cos^4 \frac{\theta}{4}$$

<u>Solución:</u>

Por ser simétrica $L = 2\, L_1$, siendo L_1 la longitud del arco comprendido - entre 0 y π .



$$\rho = a \cos^4 \frac{\theta}{4} \qquad \rho' = - a \cos^3 \frac{\theta}{4} \operatorname{sen} \frac{\theta}{4}$$

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^8 \frac{\theta}{4} + a^2 \cos^6 \frac{\theta}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4}}\; d\theta .$$

Sacando el factor común:

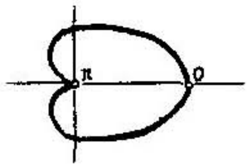
$$a^2 \cos^6 \frac{\theta}{4}$$

$$L = 2a \int_0^{\pi} \cos^3 \frac{\theta}{4}\, d\theta = 2a \left[4 \operatorname{sen} \frac{\theta}{4} - \frac{4}{3} \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{10\, a \sqrt{2}}{3}$$

16.- Longitud de la cardioide:

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

Solución:



$\rho = a(1+\cos\theta)$ $\quad \rho' = -a \operatorname{sen} \theta$

Por ser la curva simétrica:

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta .$$

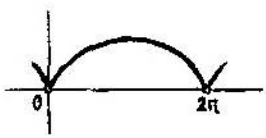
$$L = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta = 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 8a\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8a$$

17.- Longitud de un arco de la cicloide:

$$x = t - \operatorname{sen} t \qquad y = 1 - \cos t.$$

Solución:



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

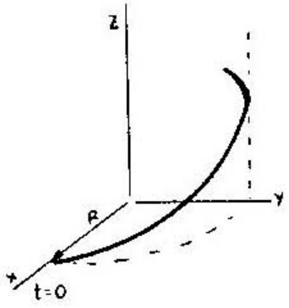
$x'(t) = 1-\cos t \qquad y'(t) = \operatorname{sen} t$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -4\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8$$

> 18.- *Calcular la longitud de un paso de hélice cilíndrica de ecuación:*
>
> $x = R\cos t \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,t \qquad z = kt.$

Solución:



$x = R\cos t \qquad x' = -R\,\mathrm{sen}\,t$

$y = R\,\mathrm{sen}\,t \qquad y' = R\cos t$

$z = kt \qquad z' = k$

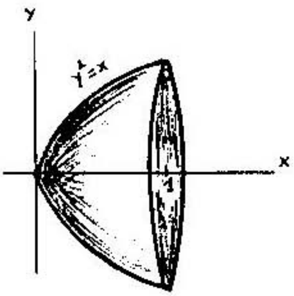
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\mathrm{sen}^2 t + R^2\cos^2 t + k^2}\;dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + k^2}\;dt = 2\pi\sqrt{R^2 + k^2}$$

> 19.- *Área engendrada por el arco de parábola* $y^2 = x$ *entre* $x = 0$, $x = 1$, *al girar alrededor del eje Ox.*

Solución:



$$S = 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\;dx$$

$$y(x) = x^{1/2} \qquad y' = \frac{1}{2}\,x^{-1/2}$$

$$S = 2\pi\int_0^1 x^{1/2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\,x^{-1}}\;dx =$$

$$= \pi\int_0^1 \sqrt{x}\;\sqrt{\frac{4x+1}{x}}\;dx$$

$$S = \pi\int_0^1 \sqrt{1+4x}\;dx = \pi\left[\frac{(1+4x)^{3/2}}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\,(5\sqrt{5}-1)$$

> *20.- Área engendrada por la astroide:*
>
> $$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$$
>
> *al girar alrededor del eje Ox.*

Solución:

Como hicimos en el ejercicio nº 13:

$$x = k \cos^3 t \qquad y = k \operatorname{sen}^3 t$$

El elemento diferencial de área engendrada es:

$$dS = 2\pi\, y\, ds = 2\pi\, y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Al ser la curva simétrica respecto al eje Ox:

$$S = 2\int_0^{\pi/2} 2\pi\, y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

$$x'(t) = -3k \cos^2 t \operatorname{sen} t$$

$$y'(t) = 3k \operatorname{sen}^2 t \cos t.$$

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/2} k \operatorname{sen}^3 t \sqrt{9k^2 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t}\, dt = 12\pi k^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos t\, dt$$

$$S = 12\pi k^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi k^2$$

> *21.- Área engendrada por la cardioide:*
>
> $$\rho = a(1 + \cos\theta)$$
>
> *al girar alrededor del eje polar.*

Solución:

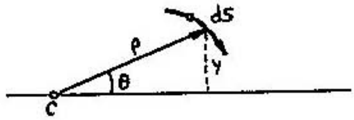
El elemento de área: $dS = 2\pi\, y\, ds$, puede escribirse como:

$$dS = 2\pi\, \rho \operatorname{sen}\theta \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta$$

Luego:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta$$

$\rho = a(1 + \cos\theta)$ $\qquad\qquad$ $\rho' = -a \operatorname{sen}\theta$



$$S = 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\operatorname{sen}^2\theta}\; d\theta =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\sqrt{2+2\cos\theta}\;\operatorname{sen}\theta\; d\theta$$

$$S = 2\pi\sqrt{2}\,a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{3/2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2\pi\sqrt{2}\,a^2\left[-\frac{(1+\cos\theta)}{5/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4a^2\pi\sqrt{2}}{5}$$

22.- Área engendrada por la lemniscata

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

al girar alrededor del eje polar.

<u>Solución:</u>

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

Ver gráfica ejercicio

numero 9.

$$\rho' = \frac{-a \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$S = 2.2\pi\int_0^{\pi/4}(a\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta)\sqrt{a^2\cos\theta + \frac{a^2\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\; d\theta =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta\frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\, d\theta = 4\pi a^2(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} = 4\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

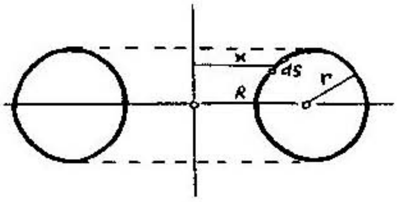
$$S = 2\pi a^2(2-\sqrt{2})$$

23.- Área engendrada por la circunferencia:

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2 \; ; \quad r < R$$

al girar alrededor del eje Oy.

Solución:



El cuerpo engendrado es un toro de revolución.

Si tomamos un elemento de línea ds a una distancia x del eje Ox, el elemento de área engendrado valdrá:

$$d\,s = 2\pi\, x ds$$

y extendiendo ds a lo largo de toda la circunferencia, tendremos el área pedida:

$$d\,s = 2\pi\, x \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi\, x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\; dy$$

con:

$$x = R \pm \sqrt{r^2 - y^2}$$

despejada de la ecuación de la circunferencia.

Para $x_1 = R + \sqrt{r^2 - y^2}$, desde $y = -r$ a $+r$, engendraremos la superficie mediante la semicircunferencia más lejana al Ox.

Así pues:

$$S = s(x_1) + s(x_2) = 2\pi \int_{-r}^{+r} x_1 \sqrt{1 + (x'_1)^2}\, dy + 2\pi \int_{-r}^{+r} x_2 \sqrt{1 + (x'_2)^2}\; dy$$

$$x'_1 = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}} \qquad\qquad x'_2 = \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{+r} (R + \sqrt{r^2 - y^2}) \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}}\; dy + 2\pi \int_{-r}^{+r} (R - \sqrt{r^2 - y^2}) \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}}\; dy$$

$$S = 2\pi \int_{-r}^{+r} 2R \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}}\; dy = 4\pi R \int_{-r}^{+r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}\; dy = 4\pi Rr \left[\operatorname{arcsen} \frac{y}{r}\right]_{-r}^{+r}$$

$$S = 4\pi Rr\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\pi^2 Rr \text{ ó } S = 2\pi R . 2\pi r$$

24.- Volumen engendrado por el arco de parábola $y^2 = x$, entre las abcisas $x = 0$, $x = 1$, al girar alrededor del eje Ox.

Solución:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 \, dx \qquad V = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Ver figura ejercicio número 19.

25.- Volumen engendrado por la astroide:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$$

al girar alrededor del eje Ox.

Solución:

Para los límites y el cambio ver ejercicios nº 13 y 20.

$$V = 2\pi \int_0^k y^2 dx = 2\pi \int_0^k (k^{2/3} - x^{2/3})^{3/2 . 2} \, dx \quad , \quad x = k\cos^3 t$$

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} (k^{2/3} - K^{2/3}\cos^2 t)^3 (-k . 3\cos^2 t \text{ sen} t) dt =$$

$$= -6\pi k^3 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^7 t \cos^2 t \, dt \qquad \text{(Euleriana)}$$

$$V = -6\pi k^3 \frac{1}{2} \beta\left(4, \frac{3}{2}\right) = -3\pi k^3 \frac{3 . 2 . \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{\frac{9}{2} \frac{7}{2} \frac{5}{2} . \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{-32}{105} \pi k^3$$

Tomando valores absolutos:

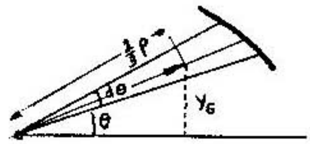
$$V = \frac{32}{105} \pi k^3$$

26.- Volumen engendrado por la cardioide:

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

al girar alrededor del eje polar.

Solución:



Calculemos el elemento diferen - cial de volumen engendrado. Tomando el elemento de área en - coordenadas polares:

$$ds = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$$

su centro de gravedad se encuen - tra a:

$$\frac{2}{3}\rho$$

del origen O, ya que es un triángulo. El elemento de volumen valdrá:

$$dv = 2\pi\, y_G \quad ds$$

es decir el area $d\Omega$ por la longitud de la circunferencia recorrida por el centro de gravedad:

$$y_G = \frac{2}{3}\rho \quad \operatorname{sen}\theta \longrightarrow dv = \frac{4\pi}{3}\rho \operatorname{sen}\theta \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$$

$$dv = \frac{2\pi}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \quad V = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{2\pi}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \ .$$

En nuestro caso:

$$V = \int_0^{\pi} \frac{2\pi}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\theta)^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{2\pi a^3}{3}\left[\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}\ \frac{2^4}{4} = \frac{8\pi a^3}{3}$$

27.- Volumen engendrado por el área limitada por las curvas:

$$y = xe^{-x} \qquad y = x^2\, e^{-x}$$

al girar alrededor del eje Ox.

Solución:

Para la figura ver ejercicio 7.

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x\, e^{-x})^2 - (x^2 e^{-x})^2 \right] dx \, +$$

$$+ \pi \int_1^{\infty} \left| (x^2 e^{-x})^2 - (x\, e^{-x})^2 \right| dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^2\, e^{-2x} - x^4 e^{-2x})\, dx + \pi \int_1^{\infty} (x^4\, e^{-2x} - x^2\, e^{-2x})\, dx$$

Integrando por partes:

$$V = \pi \left[\left(\frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x} \right]_0^1 + \quad \left[-\left(\frac{x^4}{2} - x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2} \right) e^{-2x} \right]_1^{\infty}$$

$$V = \pi \,(4\, e^{-2} - \frac{1}{2} + 4\, e^{-2}) = \pi \,(\frac{8}{e^2} - \frac{1}{2})$$

28.- Volumen obtenido al girar alrededor del eje $y = 5$, el área limitada por las curvas:

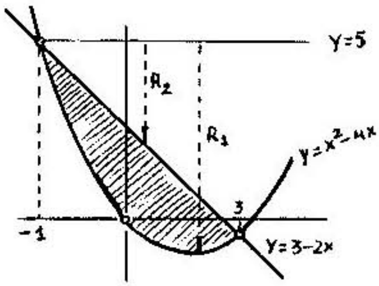
$$y = x^2 - 4x \qquad y = 3 - 2x$$

Solución:

Encontramos primero, los puntos de corte:

$$x^2 - 4x = 3 - 2x \ ; \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \ ; \quad x = -1 \ ; \ x = 3$$

El volumen engendrado será:



$$V = \pi \int_{-1}^{3} (R_1(x)^2 - R_2(x)^2)\, dx$$

$$R_1(x) = 5 - y_1 = 5 + 4x - x^2$$

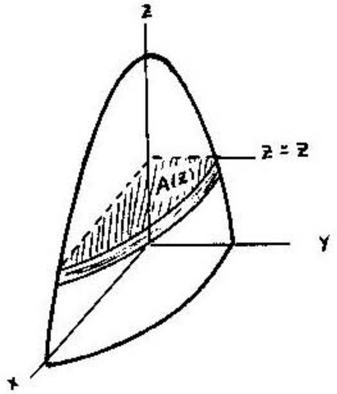
$$R_2(x) = 5 - y_2 = 2 + 2x$$

$$V = \pi \int_{-1}^{3} \left[(5+4x-x^2)^2 - (2+2x)^2\right] dx = \pi \int_{-1}^{3} (x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 32x + 21)\, dx = \frac{847\pi}{15}$$

29.- Calcular el volumen del elipsoide:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

Solución:



En el ejercicio nº 6, hemos calculado que el área de la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

era π ab.

Si seccionamos el elipsoide por el plano z = z, (en la figura, se representa tan solo un octante) obtenemos la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 ; \quad \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2)} = 1$$

El área de esta sección valdrá:

$$A(z) = \pi \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}\, \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2} = \frac{\pi ab}{c^2}(c^2 - z^2)$$

El volumen valdrá entonces:

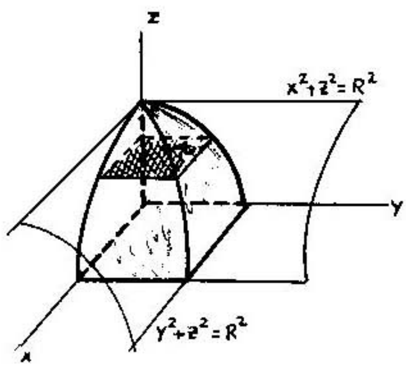
$$V = \int_{-c}^{+c} A(z)\,dz = \int_{-c}^{+c} \frac{\pi\,ab}{c^2}\,(c^2 - z^2)\,dz = \frac{\pi\,ab}{c^2}\left[\,c^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-c}^{+c}$$

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,abc.$$

30.- Hallar el volumen común a dos cilindros de ecuaciones:

$$x^2 + z^2 = R^2;\quad y^2 + z^2 = R^2$$

<u>Solución:</u>



En la figura solo está representado un octante de esta intersección. - Cortando por el plano z = z, obtenemos un cuadrado de lados:

$$x^2+z^2 = R \longrightarrow x^2 = R^2-z^2$$

$$x=y= \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$y^2+z^2 = R^2 \longrightarrow y^2 = R^2-z^2$$

El área de este cuadrado será:

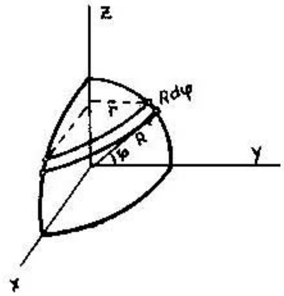
$$A(z) = \sqrt{R^2 - z^2}\;\sqrt{R^2 - z^2}$$

$$V = \int_{z_0}^{z_1} A(z)\,dz = 8\int_0^R (R^2-z^2)\,dz = 8\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)_0^R = \frac{16}{3}\,R^3$$

31.- Área de la esfera de radio R;

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Solución:



La banda de superficie de radio r y ancho rd φ, tiene un valor de área:

$$\Omega(\varphi) = 2\pi r.Rd\varphi$$

con:

$$r = R\cos\varphi.$$

Variando φ entre 0 y $\pi/2$ obtendremos el área de la semiesfera superior.

Así pues:

$$\Omega = 2\int_0^{\pi/2} 2\pi rRd\varphi = 2\int_0^{\pi/2} 2\pi(R^2\cos\varphi)\,d\varphi$$

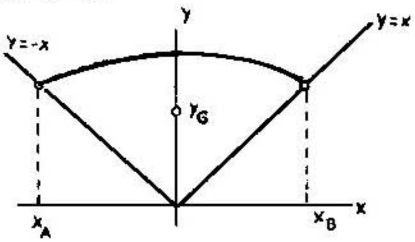
$$= 4\pi R^2\left[\operatorname{sen}\varphi\right]_0^{\pi/2} = 4\pi R^2$$

32.- Hallar el centro de gravedad del arco de circunferencia:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

limitado por su intersección con la rectas $y = x$, $y = -x$ con $y > 0$. Suponer la densidad del arco constante.

Solución:



Recordando que el centro de gravedad está sobre los ejes de simetría si los hay, solo debemos calcular el valor de y_G.

La fórmula de cálculo del centro de gravedad:

$$y_G\int_M dm = \int_M y\,dm$$

donde dm es el elemento diferencial de masa y M toda la masa del cuerpo. En nuestro caso:

$$Y_G \cdot \int_{\widehat{AB}} \delta \, ds = \int_{\widehat{AB}} y \, \delta \, ds$$

donde δ es la densidad por unidad de longitud y ds el elemento diferencial de longitud.

Al ser δ constante:

$$Y_G \int_{\widehat{AB}} \delta \, ds = \int_{\widehat{AB}} y \, ds \; ; \quad Y_G \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

con:

$$y = (R^2 - x^2)^{1/2}$$

x_A, x_B son las abcisas de los puntos de corte:

$$x^2 + x^2 = R^2 \qquad x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad x_A = -\frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x_B = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$y_G \cdot \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{+\frac{R}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2-x^2}} \right) dx = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{+\frac{R}{\sqrt{2}}} (R^2 - x^2)^{1/2} \sqrt{1+ \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \; dx$$

$$Y_G \cdot \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{+\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{+\frac{R}{\sqrt{2}}} R \, dx$$

$$Y_G R \left[\text{arc sen} \frac{x}{R} \right]_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \left[Rx \right]_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

$$Y_G \left[\text{arc sen} \frac{1}{\sqrt{2}} - \text{arcsen} \frac{-1}{\sqrt{2}} \right] R = R\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Y_G \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\, R^2}{\sqrt{2}}$$

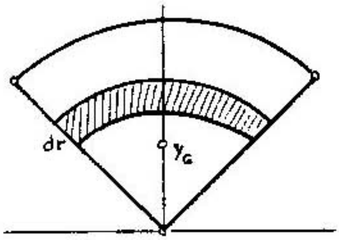
$$Y_G \cdot \frac{\pi R}{2} = \frac{2\, R^2}{\sqrt{2}} \longrightarrow Y_G = \frac{2\sqrt{2}\, R}{\pi}$$

33.- Calcular el centro de gravedad del área limitada por el arco de circunferencia:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y las rectas $y = x$, $y = -x$, con $y > 0$. Densidad superficial constante.

Solución:



En este caso el elemento de masa $dm = \delta\, d\Omega$, donde $d\Omega$, es el elemento diferencial de área

$$Y_G \int \delta\, d\Omega = \int \Omega\, \delta\, d\Omega$$

donde estas integrales están extendidas a todo el recinto limitado por las tres curvas.

Tomamos un elemento de área como el de la figura:

$$d\Omega = dr.\ \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2}\, r\, dr$$

El centro de gravedad de esta banda $d\Omega$, según el problema 32, estará situado a:

$$y = \frac{2\sqrt{2}\, r}{\pi}$$

Luego:

$$Y_G \int_0^R \frac{\pi}{2}\, rdr = \int_0^R \frac{2\sqrt{2}\, r}{\pi}\, \frac{\pi}{2}\, rdr$$

$$Y_G \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{2\sqrt{2}}{2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R$$

$$Y_G = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R$$

En integrales múltiples veremos un método más fácil, usando integrales - dobles.

> *34.- Calcular los momentos de inercia, respecto a los ejes Ox, - Oy, del arco del ejercicio 32.*

Solución:

Recordando la definición de momento de inercia:

(Ver figura ejercicio número 32).

$$I_x = \Sigma y_i^2 \, \Delta S$$

$$I_y = \Sigma x_i^2 \, \Delta S$$

$$I_x = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} y^2 \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} (R^2 - x^2)\sqrt{1+\frac{x}{R^2-x^2}}\, dx$$

$$I_x = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} R\sqrt{R^2-x^2}\, dx$$

Haciendo:

$$x = R\,\mathrm{sen}t; \qquad I_x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} R^3\cos^2 t\, dt = R^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

De igual modo:

$$I_y = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} x^2\sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

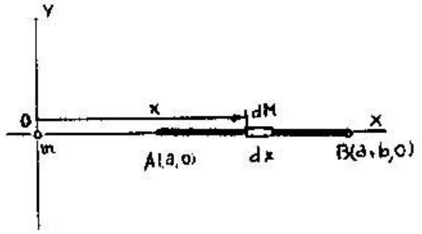
$$I_y = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} x^2 \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\, dx = \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \frac{x^2 R}{\sqrt{R^2-x^2}}\, dx$$

Haciendo el cambio x = R sent:

$$I_y = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{R^3 sen^2 t}{R\ cost} R\ costdt = R^3 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} sen^2 t\ dt = R^3 (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$$

35.- Una barra AB, de masa M y longitud L, está colocada según el eje Ox, siendo A(a,0). Su densidad varía con la distancia al punto A. Hallar la fuerza de atracción newtoniana que ejerce sobre una masa puntual, m, colocada en O(0,0).

Solución:



Sabemos que la fuerza de atracción ejercida por dos masas puntuales m_1, m_2, colocadas a una distancia R es:

$$|F| = k \frac{m_1\ m_2}{R^2}$$

En nuestro caso, el elemento de masa dM ejercerá una fuerza sobre m, de valor:

$$dF = k \frac{m\ dM}{x^2} \quad \text{con } dM = \delta(x)\ dx$$

siendo $\delta(x)$ la densidad de la barra en el punto x.

Calculemos $\delta(x)$ $\quad \delta(x) = K(x-a),\ a \leq x \leq a+L$

$$M = \int_a^{a+L} \delta(x)\ dx = \int_a^{a+L} K(x-a)\ dx = \frac{k}{2}(x-a)^2\Big]_a^{a+L} = \frac{k}{2} L^2 \rightarrow k = \frac{2M}{L^2}$$

$$\delta(x) = \frac{2M}{L^2}(x - a)$$

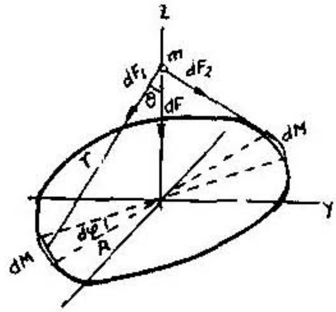
es la densidad en cada punto:

$$dF = k\frac{m}{x^2}\,\frac{2M}{L^2}(x - a)\,dx \;; \qquad F = \int_a^{a+L}\frac{k\ m\ 2M}{L^2}\,\frac{x-a}{x^2}\,dx$$

$$F = \int_a^{a+L}\frac{k\ m\ 2M}{L^2}\left[\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}\right]dx = \frac{k\ m\ 2M}{L^2}\left[\,\mathrm{Ln}\left(\frac{a+L}{a}\right) + \frac{a}{a+L} - 1\right]$$

36.- Un hilo circular de masa M y radio R, de densidad constante tiene su centro en O(0,0), situado en el plano xy. Calcular la fuerza que ejerce sobre una masa puntual colocada en el eje Oz, en la cota z.

Solución:



Por simetría, la fuerza resultante se ejerce en la dirección del eje Oz: (Ver figura).

$$\overline{dF} = \overline{dF}_1 + \overline{dF}_2 \qquad |dF| = 2|dF_1|\cos\theta$$

$$|\overline{dF_1}| = k\,\frac{m\,.dM}{r^2} = \frac{k\ m\ \delta\ .R\ d\ \varphi}{r^2}$$

$$r^2 = z^2 + R^2 \;; \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$|\overline{dF_1}| = \frac{k\ m\,\delta\ R}{z^2 + R^2}\,d\,\varphi \;; \qquad \cos \quad = \frac{2}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

Variando φ entre 0 y π.

$$|\overline{dF}| = \frac{2km\,\delta\ R}{(z^2 + R^2)(z^2 + R^2)^{1/2}}\ d \qquad ; \; F = \int_0^{\pi}\frac{2\ km\,\delta\ R\ z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\ km\ \delta\ R\ z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\ \pi$$

LLamando:

$$M = 2\pi R \delta\ .$$

$$F = \frac{km\ M\ z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

37.- Calcular: $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3}\right)$$

Solución: $1/_3$

38.- Calcular: $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/_n}$$

Solución:

Llamar $A = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/_n}$ y calcular el límite de Ln A.

$$L = e^{-1}$$

39.- Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

Solución:

$$2(\sqrt{2} - 1)$$

40.- Hallar "K" para que el área encerrada por:

$$y = k\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

y el eje Ox sea igual a la unidad, m, σ constantes.

Solución: Descomponer el intervalo $(-\infty, +\infty)$ en $(-\infty, m]$ $[m, +\infty)$.-

Hacer el cambio:

$$\frac{x - m}{\sigma} = t$$

y convertirla en Euleriana:

$$k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

41.- Hallar el área encerrada por la astroide:

$$x^{2/_3} + y^{2/_3} = k^{2/_3}$$

Solución:

$$\Omega = \frac{3\pi k^2}{8}$$ Ver el ejercicio 13.

42.- Calcular el área común a las dos cardioides:

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \qquad \rho = a(1 + \cos(\theta - \alpha))$$

siendo α constante.

Solución:

$$\Omega = 4a^2(2 - \operatorname{sen}\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4})$$

La intersección es simétrica según el radio vector $\theta = \alpha/2$

43.- Hallar a, para que la recta $y = ax$, divida al recinto limitado por $y = 0$, $y = x - x^2$, en dos partes iguales en área.

Solución:

$$a = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

44.- Calcular el área comprendida entre:

$$y^2 = ax, \quad y^2 = 2ax - x^2$$

Solución:

$$\Omega = a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\right)$$

45.- Calcular la longitud del arco de curva:

$$y = -\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,(2 - x^2)$$

entre los puntos de abcisas $x = 0$, $x = 1$.

Solución:

$$L = 1 + \sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

46.- Calcular la longitud de la curva:

$$\rho = a\,\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{3}$$

Solución:

$$L = \frac{3\pi a}{2}$$

La longitud es doble de la comprendida entre los valores $\theta = 0$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

47.- Dada la curva alabeada:

$$x = \frac{1}{2} t^2; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{3} t^3 \; ; \quad z = \frac{1}{4} t^4$$

calcular la longitud entre los puntos $(0,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{4})$.

Solución:

$$L = \frac{4}{3}$$

48.- Área engendrada por el arco de catenaria $y = chx$, entre los puntos de abcisas $x = 0$, $x = 1$, a) al girar alrededor del eje OY, b) Al girar alrededor del eje Ox.

Solución:

a) $\Omega = 2\pi(1 + e)$. Tomar "y" como variable e integrar por partes.

b) $\Omega = \frac{\pi}{e}(2 + sh\, 2)$.

49.- Calcular el volumen engendrado por el recinto limitado por las curvas:

$$x^2 - 4y = 0; \quad y^2 - 4x = 0$$

al girar alrededor del eje OY.

Solución:

$$V = \frac{96}{5}\pi$$

Tomar "y" como variable

50.- Volumen engendrado por el primer arco de cicloide $x = \theta - sen\,\theta$ - $y = 1 - \cos\theta$, al girar alrededor del eje Ox.

Solución:

$$V = 5\pi^2$$

51.- Volumen engendrado por un arco de catenaria $y = chx$ entre los puntos de abcisas $x = 0$, $x = 1$, al girar alrededor del eje OY.

Solución:

$v = \frac{\pi}{2}\left(e + \frac{5}{e} - 4\right)$. Tomar "y" como variable, integrar por partes.

52.- Calcular el volumen engendrado por la cisoide:

$$y^2x = (2 - x)^3$$

al girar alrededor del eje OY.

Solución:

Integrando por tubos, el elemento de volumen es:

$$dv = 2\pi xy\ dy$$

convertirla en Euleriana:

$$V = 2\pi^2$$

53.- Calcular el volumen obtenido al girar alrededor del eje Ox, la región interior a la curva:

$$3ax^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0$$

Solución:

$$V = \frac{a\ \pi}{5.3^4.b^2}$$

54.- Calcular el volumen del paraboloide elíptico:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

comprendido entre $z = 0$; $z = h$.

Solución:

$$V = a\ b\ h^2\pi$$. Tomar "z" como variable.

55.- Calcular el momento de inercia respecto al eje polar de la cardioide:

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

Solución:

$$I = \frac{1024}{315}\ a^3$$

Escribir la función en $\frac{\theta}{2}$, y luego convertirla en Euleriana.

LECCION. 12

INTEGRALES IMPROPIAS.

Se define:

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x_1 \to \infty} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

Cuando este límite existe.

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \lim_{x_0 \to \infty} \int_{-x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

Cuando este límite existe.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{x_1 \to \infty} \int_{-x_1}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{x_2 \to \infty} \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$$

Si f(x) presenta un nº finito de puntos de discontinuidad en el intervalo de integración, se define, en éste, la integral como:

Sea $x_2 \in [x_0 , x_1]$ tal que f(x) sea discontinua en $x = x_2$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \lim_{x \to x_2} \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \lim_{x \to x_2} \int_{x}^{x_1} f(x)\,dx$$

En todos los casos para calcular una integral impropia, basta calcular el limite en un punto singular de una primitiva de la función subintegral.

<u>Integrales Eulerianas:</u>

Se define la integral Euleriana de 2ª especie $\Gamma(p)$ como:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{p-1}\, dx$$

Si p es entero:

$$\Gamma(p) = (p-1)!$$

Se define la integral Euleriana de 1ª especie $\beta(p,q)$ como:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ó también como:

$$\beta(p,q) = 2\cdot\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Calcular el valor de la integral:

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

Solución:

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} x\, e^{-x} dx = \lim_{x \to \infty} \int_0^{x} x\, e^{-x} dx$$

Resolviendo por partes:

$$\int x\, e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = e^{-x}(-1 - x)$$

$$\mathcal{I} = \lim_{x \to \infty} e^{-x}(-1 - x) + 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{-x - 1}{e^{x}} + 1 = 0 + 1 = 1$$

2.- Hallar el valor de la integral:

$$\mathcal{I} = \int_0^{1} \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

Solución:

Haciendo el cambio:

$$x^4 = t \ ; \quad x = t^{1/4} \quad ; \ dx = \frac{1}{4} t^{-3/4}\, dt$$

$$I = \int_0^1 t^{5/4} (1-t)^{-1/2} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{1/2} (1-t)^{-1/2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\, \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$I = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \sqrt{\pi}}{1!} = \frac{\pi}{8}$$

3.- *Calcular:*

$$\int_0^1 (Ln\ x)^{2a}\, dx.$$

Solución:

Haciendo el cambio:

$$x = e^{-t} \qquad\qquad dx = -e^{-t}dt$$

$$I = \int_{\infty}^{0} (-t)^{2a}\ (-e^{-t})dt = + \int_0^{\infty} t^{2a}\ e^{-t}dt = \Gamma(2a+1) = (2a)!$$

4.- *Calcular:*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{ctg\ x}}$$

Solución:

$$I = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{-1/2}\ (\operatorname{sen} x)^{+1/2} dx = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{2\frac{3}{4}-1} (\cos x)^{2\frac{1}{4}-1} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\ \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\ \Gamma\left(1/4\right)$$

5.- *Demostrar:*

a) $$\int_0^8 \frac{dx}{x^{1/2}(2-x^{1/3})^{-1/4}} = \frac{8\sqrt{\pi}\ \Gamma(1/4)}{7\sqrt[4]{2}\ \Gamma(3/4)}$$

b) $$\int_0^{\infty} a^p\ x^{p-1} e^{-ax}\, dx = \Gamma(p)$$

Solución:

a) Haciendo el cambio: $x = 8t^3 \qquad dx = 24t^2dt$

$$I = \int_0^1 \frac{24t^2\, dt}{(8t^3)^{1/2}\,(2-2t)^{-1/4}} = 12.\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\int_0^1 t^{1/2}\,(1-t)^{1/4}\,dt =$$

$$= \frac{12}{\sqrt[4]{2}}\int_0^1 t^{3/2-1}\,(1-t)^{5/4-1}$$

$$I = \frac{12}{\sqrt[4]{2}}\,\beta\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right) = \frac{12}{\sqrt[4]{2}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} =$$

$$= \frac{12}{\sqrt[4]{2}}\;\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{4}\,\frac{3}{4}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{8}{7\sqrt[4]{2}}\;\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1/4\right)}{\Gamma\left(3/4\right)}$$

b) Haciendo el cambio $ax = t$

$$I = \int_0^{\infty} a^p \left(\frac{t}{a}\right)^{p-1} e^{-t}\,\frac{dt}{a} = \frac{a^p}{a^p}\int_0^{\infty} t^{p-1}\,e^{-t}\,dt = \Gamma(p)$$

6.- Hallar el valor de:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Solución:

Haciendo el cambio:

$$x = \operatorname{tg} t \qquad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^n} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^n\,\frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^{n-1}\,dt = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{1}{2},\frac{2n-1}{2}\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

7.- Calcular:

$$\int_{-1/2}^{\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^n}$$

haciendo el cambio:

$$2x + 1 = \sqrt{3}\ tg\ t$$

Solución:

Haciendo el cambio:

$$2x + 1 = \sqrt{3}\ tg\ t \qquad 2dx = \sqrt{3}\ \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$1 + x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = (\frac{\sqrt{3}}{2}\ tg\ t)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\ |1 + tg^2 t|$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{4^n}{(3+3tg^2 t)^n} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{\cos^2 t} = (\frac{4}{3})^n \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^n \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= (\frac{4}{3})^n \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)^{n-1}\ dt$$

$$I = (\frac{4}{3})^n \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}\ \beta\ (\frac{1}{2}, \frac{2n-1}{2})$$

Ver ejercicio anterior.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

8.- Demostrar que:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 0$$

9.- Calcular:

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

Demostrar que:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

<u>Solución:</u>

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Hacer el cambio $x^2 = y$.

10.- Calcular:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}$$

<u>Solución:</u>

$$\frac{1}{3} \beta \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

11.- Calcular:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} d(x^2)$$

<u>Solución:</u>

$$\beta \left(\frac{n + 2}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

12.- Calcular:

$$\int_{0}^{\pi/2} (\text{sen } 2\theta)^n d\theta$$

Solución:

$$2^{n-1} \ \beta \ (\frac{n+1}{2} \quad \frac{n+1}{2})$$

13.- Hallar el valor de:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^2)(1+x)^2} \ dx$$

Solución:

$$\frac{1}{2} \beta \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \beta \left(\frac{9}{10}, \frac{4}{5}\right) - \frac{1}{4} \beta \left(\frac{11}{10}, - \frac{1}{10}\right)$$

Descomponer:

$$\frac{1}{(1 + x^2)(1 + x)^2}$$

en fracciones simples. Convertirlas en Euleriana de 1ª especie.

LECCION 13

SERIES DE POTENCIAS.

Se llama series de potencia a la series funcionales de la forma:

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots a_n(x-a)^n$$

o en el caso particular a = 0.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

Si una serie de potencias es convergente para un x_0 entonces la es también para $\forall\ |x| < |x_0|$ y si es divergente para x_0 lo es $|x| > |X_0|$.

Por tanto asociado a cada serie de potencia habra un intervalo - $|x-a| < R$ tal que en el interior del mismo la serie es convergente. El radio de convergencia se determina por la formula de Canchy Hadward.

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

también se puede calcular:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

siempre que exista este límite.

Las series de potencia se pueden integrar y derivar y el campo de - convergencia es el mismo que el de partida, y la suma de la serie derivada (integrada) es la derivada (integral de la serie de partida).

Según el limite:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

sea finito cero o infinito el radio de convergencia sera finito, todo R ó se reducira unicamente al punto "a" y la suma en este caso seria a_0.

Una vez calculado el r adio de convergencia debemos estudiar el comportamiento de la serie en los puntos x = R y x = - R, para completar el estudio de la convergencia.

A las funciones que en un determinado intervalo se puede expresar -

como una serie de potencias se llama funciones analiticas.

Diversas formas de desarrollar en serie una función.

a) Desarrollo de Taylor o Maclaurin en este caso debemos comprobar que el resto del desarrollo tenga por limite cero.

b) Por simple división cuando se trate de cociente de polinomios, ordenandolos en potencias crecientes antes de dividir.

c) Por medio de binomio de Newton.

d) Utilizando la derivación (integración) de otra función más facil de - desarrollar.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Hallar el campo de convergencia:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} tg^n x$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

y demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

<u>Solución:</u>

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|tg^n x|} = |tg\, x| < 1 \qquad -1 < tgx < 1.$

$tgx = 1$ la serie $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ divergente.

$tgx = -1$ $-1 + 1 - 1 + 1$ divergente.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(x)^{n+1}}{n\,(x)^n} = \frac{n+1}{n}\ |x| = |x| < 1 \qquad -1 < x < 1.$

en los extremos:

$x = 1 \quad = \sum^{\infty} n$ divergente.

$x = -1 \quad = \sum_{1}^{\infty}(-1)^n\, n$ divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$$

$$S_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots nx^n$$

$$xS_n(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots nx^{n+1}$$

$(1-x)\, S_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n + nx^{n+1}$; $\quad (1-x)\, S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)(1-x) =$

$$= \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} + \lim_{n\to\infty} nx^{n+1} = \frac{x}{(1-x)} \qquad S_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2.- Estudiar el radio de convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} |x|^{n+1}}{\dfrac{n!}{n^n} |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\ n^n\ |x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\ n!\ |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} |x| < 1 \qquad \frac{1}{e} |x| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| < e.$$

2b) Hallar el radio de convergencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \left|\frac{x}{2x+2}\right|^n$$

Solución:

Hacemos $\dfrac{x}{2x+2} = z$ con lo que la serie sería:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} |z|^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+2}{2n+3} |z|^{n+1}}{\dfrac{n+1}{2n+1} |z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\ (2n+1)}{(n+1)\ (2n+3)} |z| < 1 \qquad |z| < 1.$$

$$-1 < z < 1 \qquad -1 < \frac{x}{2x+2} < 1 \qquad -2x-2 < x < 2x+2 \quad = \quad x > -\frac{2}{3}$$

3.- *Estudiar el campo de convergencia de:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,3^n}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1\quad 3^{n+1}}}{\dfrac{|x|^n}{n\,3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,3^n\,|x|^{n+1}}{n+1\,3^{n+1}\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3} < 1 \qquad |x| < 3$$

Para $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{n}$ divergente.

Para $x = -3 \Rightarrow (-1)^n \frac{1}{n}$ serie alternada convergente.

$$-3 \leq x < 3.$$

3b) *Hallar el campo de convergencia de:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1 + nx^2)}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)\ (1+(n+1)x^2)}}{\dfrac{|x|^n}{n(1+nx^2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}\ n(1+nx^2)}{|x|^n\ (n+1)(1+n+1)x^2} = |x|$$

Por tanto:

$$|x| < 1; \qquad -1 < x < 1.$$

Veamos que ocurre en los extremos:

$x = 1$ tenemos, $\dfrac{1}{n(1+n)}$ que es convergente aplicando el criterio de Prinshein.

$x = -1 \qquad (-1)^n \dfrac{1}{n(n+1)}$ alternada, los modulos decrecen :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

Teorema de Leibniz converge por tanto el campo de convergencia será:

$$-1 \leq x \leq 1.$$

4.- Averiguar la suma y el radio de convergencia de la serie

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots$$

Nota: Derivar la serie de partida.

Solución:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = S(x)$$

$$1 + \frac{3x^2}{3} + \frac{5x^4}{5} + \ldots = S'(x) \qquad S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots x^{2n} + \ldots$$

$$S'(x) = \frac{1}{1 - x^2}\ ; \ S(x) = \int S'(x)dx = \int \frac{1}{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x} \qquad 1 = A + Ax + B - Bx$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{array}\right\} \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} = |x|^2 < 1$$ $|x| < 1$ por tanto la serie de partida también tiene el mismo radio de convergencia.

5.- Hallar la suma y campo de convergencia de:

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots\ldots$$

Solución:

Consideremos la serie integrada que es:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots.$$

que hemos estudiado en el primer problema y cuya suma es $\frac{x}{(1-x)^2}$ la serie de partida sera la derivada de esta.

$$1 + 4x + 9x^2 + \ldots = \frac{1(1-x)^2 + 2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Nota: Se podria haber reuelto como el primero considerando el procedimiento dos veces.

> *6.- Encontrar el desarrollo en serie de potencias de:*
>
> $$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Solución:

Ordenamos los polinomios en potencias crecientes y dividimos.

$$\begin{array}{l|l} 1 + x & \; 1 + x + x^2 \\ \cline{2-2} -1 - x - x^2 & \; 1 - x^2 + x^3 - x^5 + \ldots \\ \qquad + x^2 + x^3 + x^4 & \\ \qquad\qquad - x^3 - x^4 - x^5 & \end{array}$$

Este desarrollo es válido para $|x|$ menor que el mínimo de los módulos de las raices del denominador.

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Luego es valido $|x| < 1$.

b) También podemos suponer que tiene un desarrollo con coeficientes indeterminados.

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$$1+x = A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots Ax+A_1x^2+A_2x^3+\ldots Ax^2+A_1x^3+A_2x^4+\ldots$$

$$A = 1$$

$$A + A_1 = 1 \quad = \quad A_1 = 0$$

$$A_2 + A_1 + A = 0 \qquad A_2 = -1$$

$$A_3 + A_2 + A_1 = 0 \qquad A_3 = 1$$

$$A_4 + A_3 + A_2 = 0 \qquad A_4 = 0$$

....

Con lo que obtenemos:

$$\frac{1 + x}{1 + x + x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + \dots \qquad |x| < 1 .$$

> *7.- Encontrar utilizando el binomio generalizado de Newton, el - desarrollo de:*
>
> $$f|x| = \sqrt{1 + x^2}$$

Solución:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots \binom{n}{n} b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n!}$$

$$(1 + x^2)^{1/2} = \binom{\frac{1}{2}}{0} 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^4 + \binom{\frac{1}{2}}{3} x^6 + \dots$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} = -\frac{1}{8} \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

Por tanto el desarrollo será:

$$\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 + \dots .$$

8.- Demostrar :

$$\cos x - x \operatorname{sen} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Solución:

se puede hacer directamente escribiendo los desarrollos del sen y cos. Nosotros vamos a cosiderar la función x cosx y luego su derivada que es la función que estamos buscando.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

La derivada:

$$\cos x - x \operatorname{sen} x = 1 - \frac{3x^2}{2!} + \ldots (-1)^n (2n+1) \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

c.q.d.

9.- Estudiar el desarrollo en serie de potencias de.

$$y = Ln\,|x^2 - 5x + 6|$$

Solución:

Vamos a considerar la derivada que es más facíl de desarrollar:

$$y' = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}(2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-5 + 2x}{6 - 5x + x^2}$$

Dividiendo:

$$\begin{array}{l|l}
-5 + 2x & 6 - 5x + x^2 \\ \hline
5 - \frac{25}{6}x & -\frac{5}{6} - \frac{13}{36}x - \frac{35}{6^3}x^2 + \ldots \\ \cline{1-1}
-\frac{13}{6}x + \frac{5}{6}x^2 & \\
+\frac{13}{6}x - \frac{65}{36}x^2 + \frac{13}{36}x^3 & \\ \cline{1-1}
-\frac{35}{36}x^2 + \frac{13}{36}x^3 &
\end{array}$$

$$y = -\frac{5}{6}x - \frac{13}{36.2}x^2 - \frac{35\,x^3}{3.36.6} + \dots\dots\dots + C.$$

Para:

$$x = 0; \qquad y = C = \text{Ln } 6$$

Por tanto:

$$\text{Ln }(x^2 - 5x + 6) = -\frac{5}{6}x - \frac{13}{36.2}x^2 - \frac{35\,x^3}{3.6^3} + \dots . + \text{Ln } 6.$$

10.- Hallar el campo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n}\right)x^n.$$

Solución:

La descomponemos en dos, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\,x^n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\,x^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}\,|x|^{n+1}}{\frac{2^n}{n}\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,2^{n+1}\,|x|^{n+1}}{n+1\,2^n\,|x|^n} = 2\,|x| < 1 \qquad |x| \quad \frac{1}{2}$$

De la misma manera para la otra serie $|x| < \frac{1}{3}$ luego la serie total sera convergente para $|x| < \frac{1}{3}$.

Veamos que ocurre en los extremos:

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{divergente}$$

Para $x = -\frac{1}{3}$ la serie seria $\sum\limits_{n=1}(-1)^n\,\frac{1}{n}$ que sabemos que es convergente por tanto la serie de partida es convergente en:

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

11.- Hallar el intervalo de convergencia de:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\, n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\; x^n}{n^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\; 10^{n-1}}$

12.- Hallar el radio de convergencia de las series:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (x - 2)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n - 1} \left(\frac{2x}{2x - 2}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{\,n+1}}$

13.- Comprpbar que el desarrollo de Taylor para la función e^x es valido para todo x.

14.- Utilizando la serie derivada averiguar la suma de:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots (-1)^n \; \frac{x^{n+1}}{n(n + 1)}$$

15.- Averiguar el desarrollo de:

$$y = \text{ar sen } x \quad ; \qquad y = \text{ar tg } x.$$

16.- Utilizando la serie integrada averiguar el valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n + 1)\, x^n$$

17.- Obtener el desarrollo:

$$y = \text{ar tg } \frac{1 + x}{1 - x}$$

18.- Estudiar el campo de convergencia de:

$$\sum^{\infty} \frac{2x^n}{4^n} \quad y \quad \frac{(x - 1)^n}{3^n}$$

19.- Estudiar el radio de convergencia de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a + 1)\; \dots\; (a + n - 1)}{b(b + 1)\; \dots\; (b + n - 1)} \,|x| \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

LECCION. 14

SERIES DE FOURIER.

Sea f(x) una función periódica de periodo 2π.

Se define como su desarrollo en serie de Fourier, a la serie:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n x$$

domde:

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos n x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x\, dx$$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} n x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

Si f(x) es de periodo $T \neq 2\pi$, podemos hacer el cambio $x = t \frac{T}{2\pi}$ y estudiar la función $g(t) = f\left(t \frac{T}{2}\right)$, periódica de periodo 2π.

Si f(x) es par: $f(x) = f(-x)$, entonces $b_n = 0$

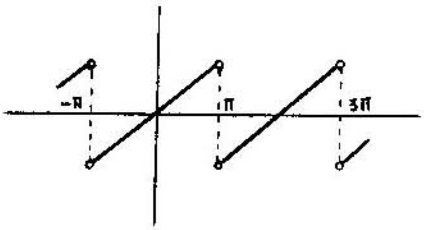
Si f(x) es impar: $f(x) = -f(-x)$, entonces $a_0 = a_n = 0$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica, de período fundamental:

$$f(x) = x \; ; \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Solución:



f(x) es impar, $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} x \text{ sen } nx \, dx$$

Integrando por partes:

$$\pi b_n = - \left| \frac{1}{n} x \cos nx \right|_{-\pi}^{+\pi} + \left| \frac{1}{n^2} \text{ sen } nx \right|_{-\pi}^{+\pi}$$

$$\pi b_n = - \frac{1}{n}(\pi \cos n\pi + \pi \cos n\pi) + \frac{1}{n^2} (\text{sen } n\pi + \text{ sen } n\pi)$$

Para:

$$n = 2p \text{ (n: par)} : \quad \pi b_n = - \frac{1}{n}(+\pi + \pi) = - \frac{2\pi}{n} \qquad b_n = - \frac{2}{n}$$

Para:

$$n = 2p + 1 \text{(n:impar)} \quad \pi b_n = - \frac{1}{n}(-\pi - \pi) = \frac{2\pi}{n} \qquad b_n = \frac{2}{n}$$

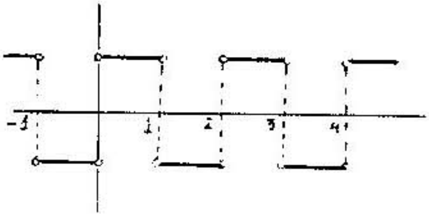
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx = 2(1 \text{ senx} - \frac{1}{2}\text{sen}2x + \frac{1}{3}\text{sen}3x - \frac{1}{4}\text{sen}4x + ..)$$

2.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica, de período fundamental:

$$f(x) = 1 \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = -1 \qquad -1 \leq x \leq 0$$

Solución:



Por ser impar:

$$a_0 = a_n = 0$$

El periodo es $T = 2$. Hacemos el cambio:

$$x = t\,\frac{2}{2\pi} = \frac{t}{\pi} \qquad \begin{array}{l} g(t) = 1,\ 0 \leq t \leq \pi \\ g(t) = -1,\ -\pi \leq t \leq 0 \end{array}$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} g(t)\operatorname{sen} nt\,dt = \int_{-\pi}^{0} -\operatorname{sen} nt\,dt + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nt\,dt = 2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} nt\,dt$$

$$\pi b_n = -\frac{2}{n}(\cos nt)_0^{\pi} = -\frac{2}{n}(\cos n\pi - 1)$$

Para:

$$n = 2p \text{ (par)}: \quad \pi b_n = -\frac{2}{n}(1-1) = 0 \qquad b_n = 0$$

Para:

$$n = 2p+1 \text{ (impar)}: \quad \pi b_n = -\frac{2}{n}(-1-1) = \frac{4}{n},\ b_n = \frac{4}{\pi n}$$

Luego:

$$g(t) = \Sigma\, b_n \operatorname{sen} nt = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \ldots\right.$$

Deshaciendo el cambio:

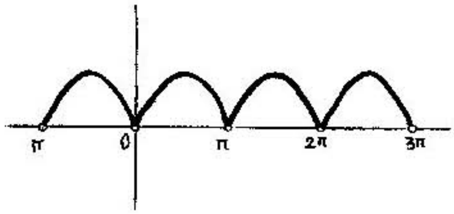
$$t = \pi x$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5\pi x + \ldots\right.$$

3.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica, de periodo base definido por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi.$$

Solución:



El periodo: $T = \pi$. Función par; $b_n = 0$.

Hacemos el cambio:

$$x = t\,\frac{\pi}{2\pi} = \frac{t}{2}$$

$$g(t) = \operatorname{sen}\frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt = -2\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -2\,(-1-1) = 4\;,\quad a_0 = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos nt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}+nt\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}-nt\right)\right]dt$$

$$\pi a_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}+nt\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}-n}\cos\left(\frac{t}{2}-nt\right)\right]_0^{2\pi}$$

Operando:

$$2\pi a_n = \frac{-2}{1+2n}\left[\cos\left(\frac{1+2n}{2}\right)2\pi - \cos 0\right] + \frac{-2}{1-2n}\left[\cos\left(\frac{1-2n}{2}\right)2\pi - \cos 0\right]$$

$$2\pi a_n = \frac{-2}{1+2n}\left[-1-1\right] + \frac{-2}{1-2n}\left[-1-1\right] = \frac{4}{1+2n} + \frac{4}{1-2n} = \frac{8}{1-4n^2}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-4n^2} = -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{4n^2-1}$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nt$$

Deshaciendo el cambio:

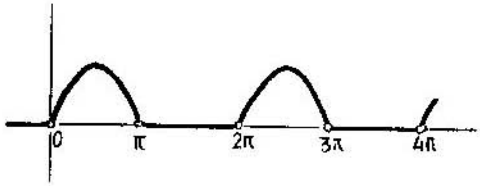
$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos n\,2x$$

4.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica de periodo fundamental definido por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$f(x) = 0 \qquad \pi \leq x \leq 2\pi.$$

Solución:



$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -(-1-1) = 2\,,\ a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}x \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\operatorname{sen}(x+nx) + \operatorname{sen}(x-nx)]\,dx$$

$$2\pi a_n = \left[\frac{-1}{1+n}\cos(1+n)x - \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$2\pi a_n = \frac{1}{n+1}\Big[1-\cos(n+1)\pi\Big] + \frac{1}{1-n}\Big[1-\cos(n-1)\pi\Big]$$

$$n=2p(\text{par}),\ 2\pi a_n = \frac{1}{n+1}(1-(-1)) + \frac{1}{1-n}(1-(-1)) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} = \frac{-4}{n^2-1}$$

$$n = 2p+1\ (\text{impar}),\ 2\pi a_n = \frac{1}{n+1}(1-1) + \frac{1}{1-n}(1-1) = 0$$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}nx\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}x \operatorname{sen}nx\,dx$$

$$\pi b_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(x-nx) - \cos(x+nx)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-n}\operatorname{sen}(1-n)x - \frac{1}{1+n}\operatorname{sen}(1+n)x\right]_0^{\pi}$$

Para: $x = \pi$ y todo valor de n:

$$\operatorname{sen}(1-n)\pi = \operatorname{sen}(1+n)\pi = 0$$

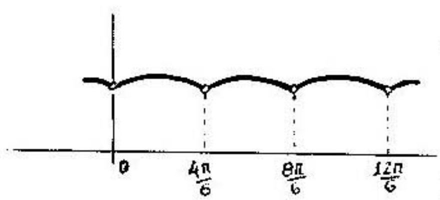
$$b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \dots\right.$$

5.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica, de - periodo fundamental definido por:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \qquad 0 \leq x \leq \frac{4\pi}{6}$$

Solución:



El periodo es:

$$T = \frac{4\pi}{6} \neq 2\pi$$

Hacemos el cambio:

$$x = t\,\frac{\frac{4\pi}{6}}{2\pi} = \frac{t}{3}$$

$$g(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Función par. $b_n = 0$

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) dt = -3\cos\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\sqrt{3} \ ; \ a_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\cos nt\, dt = \int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{t}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\cos nt\,dt$$

$$\pi a_n = \cos\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\frac{t}{3}\cos nt\,dt + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{3}\cos nt\,dt$$

$$\pi a_n = \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{t}{3} + nt\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{3} - nt\right)\right] dt +$$

$$+ \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\frac{t}{3}+nt\right)+\cos\left(\frac{t}{3}-nt\right)\right]\,dt$$

Integrando y operando:

$$a_n = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi(9n^2-1)}$$

$$g(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}\cos nt$$

Deshaciendo el cambio: $t = 3x$

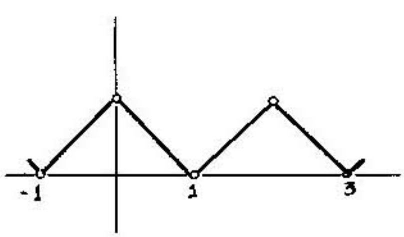
$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}\cos 3nx.$$

6.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica de - periodo fundamental definido por:

$$f(x) = x + 1 \qquad -1 \leq x \leq 0$$

$$f(x) = 1 - x \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Solución



El periodo es: $T = 2$, función par.

$$b_n = 0$$

Hacemos el cambio:

$$x = t\,\frac{2}{2\pi} \qquad x = t\,\frac{1}{\pi}$$

$$g(t) = \frac{t}{\pi} + 1 \qquad -\pi \leq t \leq 0$$

$$g(t) = 1 - \frac{t}{\pi} \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_{-\pi}^{0}\left(\frac{t}{\pi}+1\right)dt + \int_0^{\pi}\left(1-\frac{t}{\pi}\right)dt$$

Integrando:

$$2\pi a_0 = 2\pi \longrightarrow a_0 = 1$$

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} g(t)\cos nt\,dt = \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{t}{\pi} + 1\right)\cos nt\,dt +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{t}{\pi}\right)\cos nt\,dt = 2\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{t}{\pi}\right)\cos nt\,dt$$

$$\frac{\pi a_n}{2} = \left[\frac{1}{n}\,\text{sen}\,nt - \frac{1}{\pi}\left(t\,\frac{\text{sen}\,nt}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nt\right)\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{\pi a_n}{2} = -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

$n = 2p$, (n par), $\dfrac{\pi a_n}{2} = -\dfrac{1}{\pi n^2}(1 - 1) = 0$

$n = 2p+1$(n impar), $\dfrac{\pi a_n}{2} = -\dfrac{1}{\pi n^2}(-1 - 1) = \dfrac{2}{\pi n^2} \longrightarrow a_n = \dfrac{4}{\pi^2 n^2}$

$$g(t) = 1 + \frac{4}{\pi 2}\left[\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \ldots\right]$$

Deshaciendo el cambio:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi 2}\left[\cos \pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^2}\cos 5\pi x + \ldots\right]$$

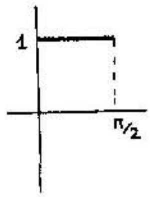
7.- Desarrollar en serie de cosenos la función definida como:

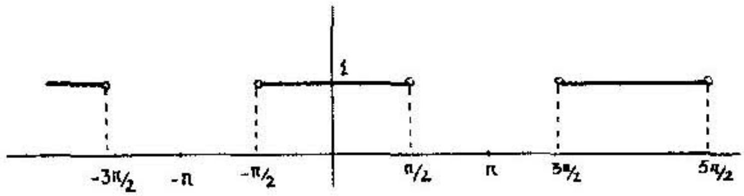
$$f(x) = 1 \qquad x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$f(x) = 0 \qquad x \notin [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Solución:

Como buscamos una serie de cosenos que converja entre $[0,\frac{\pi}{2}]$ con la función dada, vamos a completarla con una función par, periódica que solo admite desarrollo en cosenos de Fourier.





La función par a estudiar es:

$$f(x) = 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 0 \qquad -\pi < x < -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 0 \qquad \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$2\pi\ a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \longrightarrow a_0 = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ dx = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos nx\ dx = \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{n}\ (\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\ (-n\frac{\pi}{2})$$

$$\pi a_n = \frac{2}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

$n = 2p$ (n par) , $\qquad a_n = 0$

$n = 2p + 1$ (n impar)

$n = 1,5,9,13....= 1 + 4\ (k - 1) \qquad k = 1,2,3,... \qquad a_n = \frac{2}{\pi n}$

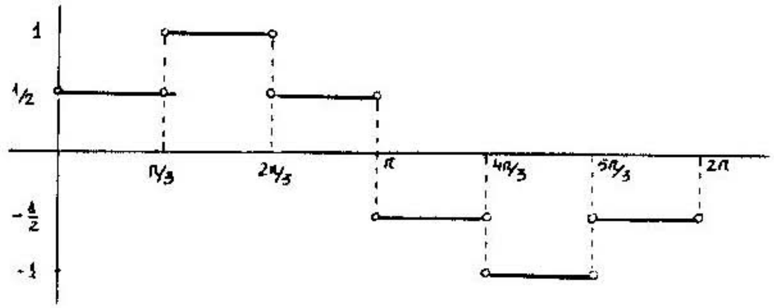
$n = 3,7,11,15...= 3 + 4\ (k - 1) \qquad k = 1,2,..... \qquad a_n = -\frac{2}{\pi n}$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\ (\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + ...)$$

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

8.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica de - periodo fundamental definido por la gráfica siguiente:

Solución:



Función impar:

$$f(x) = \frac{3}{\pi} \left[\text{sen } x + \frac{1}{5} \text{ sen } 5x + \frac{1}{7} \text{ sen } 7x + \frac{1}{11} \text{ sen } 11x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{13} \text{ sen } 13x + \frac{1}{17} \text{ sen } 17x + \ldots \right]$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

9.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica de periodo - fundamental definido por:

$$f(x) = \frac{x}{\pi} \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\left(\text{sen } 2x + \frac{1}{2}\text{ sen } 4x + \frac{1}{3}\text{ sen } 6x + \ldots\right)$$

10.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica de periodo - fundamental definido por:

$$f(x) = \cos x \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

Solución:

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1}\text{ sen } 2n\,x$$

11.- Desarrollar en serie de Fourier, la función periódica de periodo - fundamental definido por:

$$f(x) = e^x \qquad 0 \leq x \leq 2$$

Solución:

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}\cos nx - 2e^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}\text{ sen } nx.$$

12.- Desarrollar en serie de senos la función definida como:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [0, \pi]$$

$$f(x) = 0 \qquad x \notin [0, \pi]$$

Solución:

Completar con $-x^2$ entre $[-\pi, 0]$. Construirla en periódica:

$$b_n = -\frac{2\pi}{n} \quad n = 2p \quad , \quad b_n = \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{\pi n^3} \quad n = 2p + 1$$

$$f(x) = (2\pi - 8)\text{ sen } x - \frac{2\pi}{2}\text{ sen } 2x + \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{\pi 27}\right)\text{ sen } 3x + \ldots$$

LECCION 15

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

1.- Funciones Reales de Varias Variables.

Definición: A la función,

$$f : R^n \rightarrow R.$$

que hace corresponder a $(x_1,\dots x_n) \in R^n$ el número real $f(x_1\dots x_n)$, se le llama función real de n-variables reales. Al punto $(x_1\dots x_n)$ lo solemos representar por "x" coincidiendo que $x=(x_1\dots x_n)$ es un punto de R^n.

También podemos definir $f: R^n \longrightarrow R^m$ como función vectorial de n-variables reales.

Definición: Dominio de $f: R^n \longrightarrow R^m$ ó $D(f)$ es el conjunto de puntos "x" de R^n para los cuales, está definida $f(x)$.

2.- Limites

Sea:

$$f : R^n \longrightarrow R^m.$$

una función definida en un subconjunto A de R^n y sea $B \subset R^m$ la imagen por f de A.

Si "a" es un punto de acumulación de A y $b \in R^m$.

Definición: Se dice que limite de "f" cuando x tiende a "a" es "b", y se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si desde cualquier entorno $E(b) \subset R^n$, existe otro $E(a)$, entorno de "a" en R^n tal que si:

$$x \in (E(a) - \{a\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in E(b)$$

Al conjunto $E(a) - \{a\} = E^*(a)$ es lo que se denomina entorno reducido de "a"

Notar que si $R^m = R$ (osea. m=1) y $R^n = R^2$ la definición adopta la forma familiar:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = L \iff \text{dado } \varepsilon > 0,\ \exists E\ (a,b) \quad \text{si } (x,y) \in E^*(a,b) \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon.$$

NOTA:

Se exige que el punto "a" generico, en donde se toma el limite, sea de acumulación para garantizar que:

$$(E\,(x) - \{a\}) \cap A \neq \phi$$

Dada una función, $f: R^2 \longrightarrow R$ se obtienen dos funciones reales de variable real, a saber:

$$f_1\,(x) = \lim_{y \to b} f(x,y)$$

$$f_2\,(y) = \lim_{x \to a} f(x,y)$$

TEOREMA:

Si existe:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$$

y existen $f_1(x)$ y $f_2(y)$, entonces, existen $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ y $\lim\limits_{x \to b} f_2(y)$ y

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{y \to b} f_2(y)$$

Es decir, de un modo menos preciso.

"Si existe el limite doble, existen los limites según f_1 y f_2".

A los limites:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} \left[\lim_{y \to b} f(x,y) \right]$$

y:

$$\lim_{y \to b} f_2(y) = \lim_{y \to b} \left[\lim_{x \to a} f(x,y) \right]$$

Se les llama "limites reiterados".

En virtud de este Teorema podemos decir:

Si los límites reiterados existen y son diferentes, entonces no existe el límite doble.

Puede que exista el límite doble y no los reiterados.

Si existen los reiterados, aun siendo iguales, puede no existir el límite doble.

<u>Límites direccionales</u>

Dada una función $f(x,y)$ y un punto (a,b) se pueden obtener límites haciendo tender (x,y) hacia (a,b) a través de lineas; así por ejemplo:

SIGUIENDO UNA RECTA:

Sea $y - b = m(x - a)$ el haz de rectas que pasan por el punto (a,b), entonces el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a (a,b) siguiendo dicha recta es:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y = b + m(x-a)}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x, b + m(x - a))$$

SIGUIENDO CUALQUIER LINEA

Sea $y = g(x)$ una función continua que pase por el punto (a,b), entonces se puede calcular el límite de la función siguiendo dicha linea y será, en el caso en que exista:

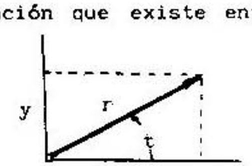
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y = g(x)}} f(x,y) = \lim_{x\to a} f(x, g(x))$$

PROPIEDADES DE ESTOS LIMITES:

- Si el límte doble existe, y tambien existen los direccionales, todos coinciden.
- Si al calcular límites siguiendo dos direcciones distintas, los límites salen diferentes, entonces, el límite doble no existe.

<u>NOTA</u>: A veces, para el calculo de límites dobles es muy util cambiar variables. En este sentido, el cambio mas usado es el cambio a polares:

Si observamos la figura veremos que la relación que existe entre "x" e "y" y las nuevas variables "r" y "t" es:



$$x = r.\cos t; \ y = r.\operatorname{sen} t.$$

Así, se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos t,\ r\operatorname{sen} t)$$

Operaciones con los limites:

Sea: $M \subset R^n$ y $a \in M$

Sean: $f, g;\ R^n \longrightarrow R^m$

definidas en "M" tales que existen:

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

Entonces:

1.- $$\lim_{x\to a} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$$

ósea que:

$$\lim_{x\to a} f(x) \ \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (f+g)(x)$$

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x)$$

2.- $$\lim_{x\to a} f(x).\ g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\ \lim_{x\to a} g(x)$$

3.- Si: $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

$x \in F(a)$ en que $g(x) \neq 0$.

TEOREMA:

El limite, si existe es único. Esta propiedad nos resulta muy útil en el cálculo práctico de limites, porque ante un caso concreto, nuestro interés va a centrarse en tratar de comprobar que el limite no existe, ya que demostrar que existe es, por una parte dificil (hay que recurrir casi siempre a la definición de limlite) y por otra poco frecuente en los ejercicios que normalmente se manejan.

3.- Continuidad

Terminaremos el resumen de esta lección con la definición de continuidad, así como con algunas propiedades de las funciones continuas.

DEFINICION:

Se dice que $f: R^n \longrightarrow R^m$ es continua en $x = a$,

$$a \in A = D(f)$$

si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ó bien. Dado $E(f(a)) \subset R^m$, arbitrario, existe un:

$$E(a) \subset R^n \quad \text{si} \quad x \in E(a) \subset A \Rightarrow f(x) \in E(f(a)).$$

Hemos de notar que estas definiciones implican tres condiciones:

a) Que exista el valor $f(a)$

b) Que exista el $\lim_{x \to a} f(x)$

c) Que coincidan los valores $f(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x)$.

Algebra de Funciones continuas.

Si $A \subset R^n$, y $a \in A$, y $f,g : A \longrightarrow R^m$ continuas en "a".

1.- $f+g$ es continua en 'a'

2.- $f.g$ es continua en "a"

3.- Si f,g continuas en "a" y $g(a) \neq 0$ y existe $E(a)$ en que no se anule "g" $\Rightarrow$ f/g continua en "a".

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Hallar el $D(f)$ para $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; b) $f(x,y) = \operatorname{Log}(1-xy)$

Solución:

a) Basta, al ser un cociente de polinomios que el denominador no se anule:

$$D(f) = \{(x,y) \;/\; x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

b) Puesto que el logaritmo de un número negativo no existe, se tendrá que un (x,y) es del dominio si: $1 - xy > 0 = 1 \quad xy \Rightarrow \{$ si $x > 0$ ha de ser $1/x > y$; si $x < 0$ ha de ser $1/x < y$ $\}$

2.- Calcular si existen, los limites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

según:

a) $A = \{(x,y)\;;\; y = ax;\; a \neq 0\}$

b) $A = \{(x,y)\;;\; y = ax^2;\; a \neq 0\}$

c) $A = \{(x,y)\;;\; y = \sqrt{ax};\; a = 0.\}$

Nota: Esos subconjuntos A en a);b);c), no son sino lineas del plano, osea, direcciones particulares, según las cuales, el punto (x,y) se va a ir acercando al $(0,0)$ a este caso particular del calculo de limites se le llama "limites direccionales".

Solución:

a) Si $y=ax$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,ax}{x^2+a^2\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2}$

Como el limite depende de "a", no es único. No hay limites doble.

b) Si $y=ax^2$: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x.ax^2}{x^2+a^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{1+a^2x^2} = 0$

Aqui el limite es cero, único. Si hubiesemos empezado el ejercicio por este caso (b), podriamos pensar que si existiria limite doble, pero, es necesario, como se vé, el comprobar las direcciones más usuales para ver que existe el limite, ó que parece bastante probable que existirá, pues el método de las direcciones sólo permite negar que un limite existe, nunca lo afirma.

c) Analogamente.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

3.- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Solución:

De modo identico al anterior, se deduce que si $y = ax$, sale $1-a^2/_{1+a^2}$;- con $y = ax^2$, 1, luego carece de limite doble. Con todo lo anterior, queda claro que una "f" tiene limite o no dependiendo de que conjunto (ó dirección) del plano se elija.

4.- Hallar el dominio y limite en (0,0) de:

$$f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\ \operatorname{sen} y$$

Solución:

$$D(f) = \{(x,y)\in R^2 \ / \ y \neq 0\}$$

Sea $y = ax$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y}.\operatorname{sen} y = \lim_{x\to 0}(1+x^2+a^2x^2)\ \frac{\operatorname{sen} ax}{ax} = 1$$

De donde se deduce que el límite siguiendo rectas que pasen por el punto (0,0) no depende de la pendiente de estas.

Si lo hacemos, por ejemplo, siguiendo parabolas, veremos que el límite es tambien "1".

Por lo tanto puede que exista el límite doble.

De hecho existe pues:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2 + y^2)\,\frac{\operatorname{sen} y}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2) = 1.$$

> *5.- Hallar Dominio y límite en (0,0) de:*
>
> $$f(x,y) = \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}$$

<u>Solución:</u>

$$D(f) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 \neq 0\} = \{(x,y) : |x| \neq |y|\}$$

No existe limite porque si hacemos los reiterados:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{1 + y}{-y^2} = -\infty$$

Según $y = ax$, se ve que tampoco lo hay.

> *6.- Límites reiterados de* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

<u>Solución:</u>

Esta función carece de limite doble, según se ve en el ejercicio (1).

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$$

Observamos pues, que a pesar de coincidir y existir los reiterados, No - existe el doble.

> *7.- Límite de:*
>
> $$f(x,y) = \begin{cases} ax^2 & y < 0 \\ -ax^2 & y \geq 0 \end{cases} \qquad (a \neq 0)$$

Solución:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

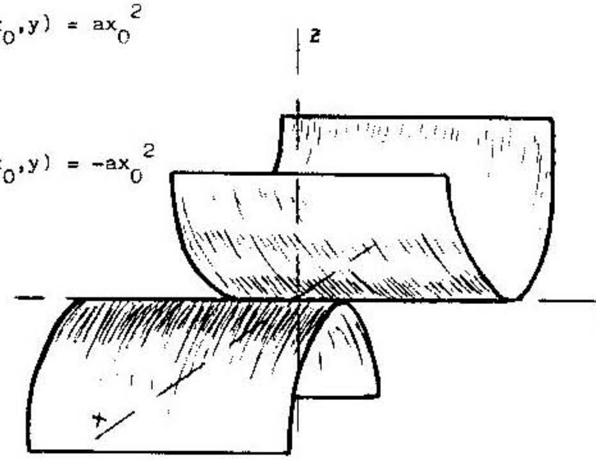
existe el limite doble.

Pero:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}} f(x_0,y) = ax_0^2$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} f(x_0,y) = -ax_0^2$$

Falta uno de los iterados.

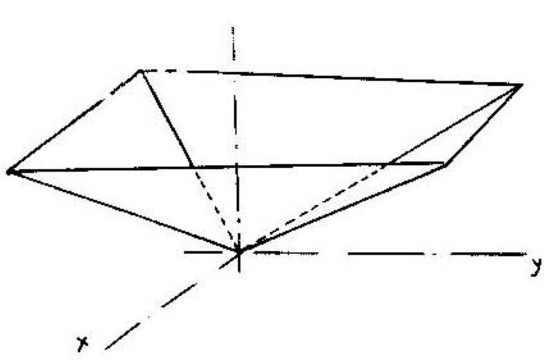


8.- Continuidad de:

$$f(x,y) = \begin{cases} |x| & |x| > |y| \\ |y| & |x| \le |y| \end{cases}$$

Solución:

La representación grafica nos indica que en cada una de las cuatro regiones en que se divide el plano por $|x| = |y|$ la "f" se define por planos luego es continuo. El único punto a dilucidar es que ocurre en



las aristas de unión. Pero como:

$$\lim_{|x| + |y|} f(x,y) = |y|$$

por cualquier dirección la "f" es continua en todo punto de R^2.

9.- Continuidad de:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

Solución:

Veamos los tres puntos de la definición:

a) $f(0,0) = \frac{0}{0}$ No está definido.

No obstante, vamos a calcular el limite aunque ya no es continua en (0,0). Podemos acercarnos a (0,0) según direcciones arbitrarias dada por:

$$\left| \begin{array}{l} x = r.\cos.t \\ y = r.\text{sen}.t \end{array} \right.$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1} - 1} = \lim_{r \to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1} - 1};$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^2 \left[\sqrt{r^2+1} + 1 \right]}{r^2+1 - 1} = 2$$

10.- Continuidad de:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Solución:

La función está definida en todo R^2 y es continua (como cociente de funciones polinómicas) fuera del (0,0).

Veamos si lo es en (0,0). Calculemos los limites reiterados:

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0 = \lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \quad 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right]$$

Podriamos tener limite. Vamos a ver si tiene limites direccional cualesquiera:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2 t\cdot r\,\mathrm{sen}t}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^2 t\,\mathrm{sen}t = 0$$

ya que:

$$0 \leq |\cos^2 t\,\mathrm{sen}t| \leq 1$$

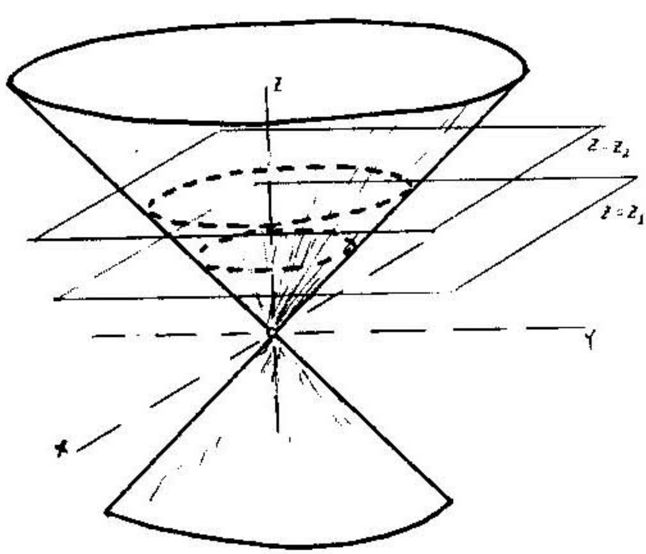
Luego es continua en todo R^2

> *11.- Representar graficamente:*
>
> $$x^2 + y^2 = f(x,y) = z^2$$

Solución:

Dando cortes por planos $Z c Z_0$, se obtienen circunferencias cortando por el plano $Z = 0$. Queda el punto $(0,0)$, luego pasa por el origen. Si cortamos según $y = 0$, queda $x^2 = z^2 \Rightarrow x = \pm z$, dos rectas en el plano $x\,0\,z$.

Analogamente, si $x = 0$. Asi, la superficie representada, es un cono de vertice el origen y con generatriz a 45º.



12.- Calcular, si existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Solución:

Se tiene:

$$\lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right) = 0$$

Por otra parte, si $a \neq 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y = ax}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^3}{x^4 + a^2 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x^2 + a^2} = 0$$

Sin embargo, si hacemos el límite a través de parábolas, obtendriamos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 ax^2}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{a}{1 + a^2}$$

que, como se ve, depende del par#ametro "a".

Por lo tanto el límite no existe.

13.- Calcular, si existe,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x.\operatorname{sen}(1/y) + y.\operatorname{sen}(1/x))$$

Solución:

Sea $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon/2$, se tiene: para $|x| < \delta$ $|y| < \delta$

$$|x.\operatorname{sen}(1/y) + y.\operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|.|\operatorname{sen}(1/y)| + |y||\operatorname{sen}(1/x)| \leq$$

$$\leq |x| + |y| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x.\operatorname{sen}(1/y) + y\ \operatorname{sen}(1/x) = 0$$

Observese que en este caso, los reiterados ni siquiera existen.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

14.- Dominio de:

$$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

Solución:

$$\{ (x,y) = x^2+y^2 < 1 \} .$$

15.- Dominio de:

$$f(x,y) = \log \frac{y}{x^2+y^2-1}$$

Solución:

$$y > 0: \quad x^2+y^2-1 > 0$$

y

$$y < 0: \quad x^2+y^2-1 < 0$$

16.- Continuidad de:

$$f(x,y) = \frac{x,y^2}{x^2 + y^4}$$

Solución:

No continua en (0,0).

17.- Idem:

$$f(x,y) = x \text{ sen } \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Solución:

Continua en R^2.

18.- Idem:

$$f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solución:

Continua en R^2. Usar el desarrollo de $(|x| - |y|)^2$.

19.- Idem :

$$f(x,y) = \frac{2x + y^2}{x^2 + y^2}$$

Solución:

No continua en (0,0)

20 .- Idem:

$$f(x,y) = x^{-1} \cdot \text{sen } x,y.$$

Solución:

Si.

21 .- Idem:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \quad (x,y) \neq (0,0); f(0,0)=1$$

Solución:

No (calculamos los iterados, que valen 0 y $f(0,0) = 1$)

22 .- Idem:

$$f(x,y) = x/4x^2 + y^2 - 1 \text{ si } 4x^2 + y^2 \neq 1$$
$$y\ (x,y) \neq (0,0)$$

y:

$$f(x,y) = 1 \text{ en otro caso}$$

Solución:

No.

23 .- Idem: $$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(0,0) = 0$$

Solución:

Si.

24.- Idem: $$f(x,y) = x^2/\sqrt{x^2 + y^2} \ ; \ f(0,0) = 0$$

Solución:

Si.

25.- Representar:

$$x^2 + y^2 = z.$$

26 .- Representar:

$$x^2 - y^2 = z.$$

LECCION. 16

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II.

Derivada direccional. Derivada parcial.

Dada una función:

$$f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

"G" abierto, se define la deriva direccional según el vector $\vec{v} \in R^n$ - en un punto $\vec{x}_0 \in G$ como:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \lambda\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{\lambda}$$

Siempre que dicho límite exista y lo notamos:

$$D_{\vec{v}}\ f(\vec{x}_0)$$

A las derivadas direccionales según los vectores de la base canóni - ca es decir según la dirección $\vec{e}_i$ donde:

$$\vec{e}_i = (0 \ldots \overset{i}{1} \ldots 0)$$

se llama derivada parcial y se representa:

$$D_{\vec{e}_i}\ f(\vec{x}_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \qquad f'_{x_i}(\vec{x}_0)$$

Dada una función $z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ podemos considerar la derivada - parcial respecto a x_i como la derivada respecto a x_i considerando las demás variables como constantes.

Nota. A partir de ahora vamos a considerar funciones de dos variables es decir:

$$z = f(x,y)$$

Interpretación geometrica de la derivada parcial de una función de dos variables. $z = f(x,y)$

La derivada parcial:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ ó } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

en el punto (x_0, y_0) es la pendiente de la tangente a la curva definida por la intersección de la función $z = f(x,y)$ con el plano: $x = x_0$ ($z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$) .

Al plano que contiene a las dos rectas tangentes en el punto (x_0,y_0) se llama plano tangente y su ecuación es:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

Diferencial total.

Dada $z = f(x,y)$ una función que admite derivadas parciales continuas en (x,y) se dice que es diferenciable . Su diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Derivadas y Diferenciales sucesivas.

Las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$, origina nuevas funciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

a las derivadas parciales de estos se les llama derivadas parciales de segundo orden, en el caso de dos variables serián:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

si estas últimas son derivables, tendriamos las derivadas parciales de -

tercer orden. A estás derivadas se les llaman derivadas sucesivas de la función $f(x,y)$.

Utilizando la definición de diferencial total podríamos demostrar:

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^n$$

<u>Teorema de Schwartz.</u>

Dada una $z = f(x,y)$. Si existen y son continuas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 \partial f}{\partial x \partial y}$$

en un entorno de un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Entonces existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y además:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

en el punto (x_0, y_0)

<u>Derivada de la función compuesta.</u>

Sea $z = f(u,v)$, donde $u = u(x)$, $v = v(x)$, en definitiva "z" será función de "x", por tanto podemos calcular z' .

$$z' = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \quad ; \quad z' = z'_u \cdot u' + z'_v \cdot v'$$

Si $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ entonces "z" será función de (x, y), y por tanto podemos calcular las derivadas parciales de "z" respecto de x,e y:

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x \quad ; \quad z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

a partir de aquí podríamos calcular las derivadas parciales sucesivas.

En este tipo de problemas es útil considerar el esquema de dependencia, para obtener la expresión de la derivadas. Así en los casos considerados será:

Para calcular las derivadas parciales de "z" respecto de "x" debe - mos "sumar" todos los caminos que parten de "z" y terminan en "x".

Función implicita. Teorema de existencia.

Sea "F" una función real de dos variables definidas en un abierto:

$$D \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{sea } (x_0, y_0) \in D \text{ tál } F(x_0, y_0) = 0$$

a) Si "F" es continua con derivadas parciales continuas.

b) $$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$$

Entonces existen dos números positivos " α ", " β ", tales que:

$$\forall x \in N(x_0, \alpha)$$

la ecuación $F(x,y) = 0$, admite solución única en $N(y_0, \beta)$.

Si llamamos " Φ" a la función implicita así definida, se verifica:

$$y_0 = \Phi(x_0)$$

y " Φ " es continua y derivable en $N(x_0, \Phi)$.

Nota:

Nosotros consideraremos que todas las funciones implicitas con las que trabajamos cumplen el teorema de existencia sin demostración.

Vamos a ver a continuación cuanto vale la derivada.

Sea $F(x,y) = 0$, que define implicitamente "y" como función de "x".

Derivando como función compuesta tendríamos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

de la misma manera prodríamos calcular las derivadas sucesivas.

Sistemas de funciones implicitas.

Dado el sistema $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$. Si consideramos que "y", y " z", están definidas implicitamente en función de "x", podríamos calcular "y' " " z' ", sin más que derivar el sistema.

Nota:

El número de variables independientes que debemos tomar para que el sistema sea determinado y por tanto se pueda calcular las derivadas es igual al número de variables menos el número de funciones implicitas.

Funciones homogeneas. Teorema de Euler.

Dada:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice que es homogenea de grado "m", si:

$$f(t \cdot \vec{x}) = t^m f(\vec{x}) \quad \forall x.$$

Teorema de Euler.

Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

es homogenea de grado "m" y tiene derivadas parciales continuas entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(\vec{x})$$

Reciprocamente, si una función "f" satisface en su dominio de definición el Teorema de Euler, entonces dicha función es homogenea.

Para dos variables: $z = f(x,y)$

"z" es homogenea:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Teorema de Euler.

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n\, f(x,y)$$

Determinantes funcionales. WRONSKIANO . JACOBIANO Y HESSIANO.

WRONSKIANO.

Dadas "n" funciones $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots\ldots f_n(x)$ se llaman Wronskiano a:

$$W(x)= \begin{vmatrix} f_1(x), \; f_2(x) \ldots\ldots\ldots f_n(x) \\ f_1'(x), \; f_2'(x) \ldots\ldots\ldots f_n'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1^{n-1}(x) \ldots\ldots\ldots\ldots f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

HESSIANO.

Dada una función $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ se llama Hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

JACOBIANO.

Dada "n" función de "n" variables $f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$; $f_2(x_1 \dots x_n) \dots$

$\dots f_n(x_1 \dots x_n)$ se llama Jacobiano al determinante:

$$\frac{\partial (f_1, f_2 \dots f_n)}{\partial (x_1 \dots \dots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Hallar a partir de la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$$

siendo:

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1+h)^2 - 2}{h} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{K \to 0} \frac{f(1,K) - f(1,0)}{K} = 1$$

2.- Sea:

$$f(x,y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Demostrar que existen las derivadas parciales en (0,0) y son continuas.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} = p \operatorname{sen}\theta\,.\cos 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta\,)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} = p \cos\theta\,(\cos 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta\,)$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{p \to 0} p \operatorname{sen}\theta\,(\cos 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta\,) = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

Luego:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f'_x = f'(0,0)$$

3.- Dado:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Demostrar que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

existen, y "f" es discontinua en (0,0).

Solución:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \operatorname*{Lim}_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Pero:

$$\operatorname*{Lim}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \operatorname*{Lim}_{r\to 0} \frac{r\cos\alpha \; r\operatorname{sen}\alpha}{r^2} = \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha .$$

No existe al depender de α . Esto nos muestra que la existencia de derivadas parciales no implica, la continuidad.

4.- Probar que:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(0,0) = 0$$

es diferenciable en (0,0) y sin embargo las derivadas parciales no son continuas en (0,0).

Solución:

Para que "f" sea diferenciable en (0,0) debe:

$$\operatorname*{Lim}_{(h,k)\to(0,0)} \frac{[f(0 + h,\, 0 + k) - f(0,0) - mh - nk]}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$m = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \operatorname{Lim} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \operatorname{Lim} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{|h|}}{h} =$$

$$= \operatorname{Lim} \; h \operatorname{sen} \frac{1}{|h|} = 0 = n.$$

Luego: L (h,k) es aquí nula.

Asi:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - 0|}{||(h,k)||} = \lim \frac{(h^2 + k^2)\ \text{sen}\ \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim \frac{\rho^2\ \text{sen}\ \frac{1}{[\rho]}}{[\rho]} = 0$$

Luego es diferenciable. En cuanto a la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ \text{sen}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x^2+y^2)(\cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\cdot$$

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}\right) = 2x\ \text{sen}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

En (0,0), $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

Pero:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \lim \left[2x\ \text{sen}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \left[2\rho\cos\alpha\ \text{sen}\ \frac{1}{[\rho]} - \frac{\rho}{[\rho]} \cos\alpha\ \cos\frac{1}{[\rho]}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \left[-\frac{\rho}{[\rho]} \cos\alpha\ \cos\frac{1}{[\rho]}\right] = \text{no existe.}$$

para: $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho}{[\rho]} = \pm 1$ según $\rho \to 0$ con $\rho > 0$ ó

$\rho \to 0$ con $\rho < 0$.

Luego $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en (0,0).

5.- Sea:

$$f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0)\ ;\ f(0,0) = 0$$

Probar que "f" no es diferenciable en (0,0).

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \text{Lim}\ \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim \frac{\dfrac{h[0]}{[h]}}{h} =$$

$$= \text{Lim}\ \frac{0}{h[h]} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Así:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{[f(h,k)-f(0,0) - 0]}{[[(h,k)]]} = \text{Lim}\ \frac{\dfrac{h\,[k]}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{h[k]}{h^2+k^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\alpha\,[\rho\,\text{sen}\,\alpha]}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\alpha\,[\rho^2]\,(\text{sen}\,\alpha)}{\rho^2}$$

no existe.

> *6.- Sea:*
>
> $$f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;\quad f(0,0).$$
>
> *Demostrar que:*
>
> $$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = -y\ (\forall y) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = x\ (\forall x)$$
>
> *y comprobar que:*
>
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$$

Solución:

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \text{Lim}\ y\,\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = y\,\frac{-y^2}{y^2} = -y$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} x\,\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2} = x\,\frac{x^2}{x^2} = x$$

Calculemos ahora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\partial f(0,k)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{k} =$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f(h,0)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{h} = 1$$

7.- Sea $F(r, \alpha, \beta)$, donde se hace el cambio a rectangulares:

$$x = r \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$
$$y = r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$
$$z = r \cos\alpha$$

Calcular:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

En función de r, α, β, y de las derivadas de F respecto a las mismas variables.

Solución:

$$F \begin{cases} r \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \\ \alpha \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \\ \beta \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

Pero:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{r \operatorname{sen}\alpha \cos\beta}{r} = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{z} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x^2+y^2}{z^2}} = \frac{xz}{r^2 \sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{r^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \cos\beta}{r^2\, r \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{r}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{r^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{r \operatorname{sen}\alpha}$$

y análogo los demás.

8.- Dada la expresión:

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

siendo $u = u(x,y)$, hallar "A" en función de r, θ si:

$$x = r\, ch\, \theta$$
$$y = r\, sh\, \theta$$

Solución:

$$u \begin{cases} r \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \theta \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 - y^2} \\ \theta &= \arg.\ th\ \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\ \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\ \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\ \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\ \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \frac{y}{x^2-y^2}\right| =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\ \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial\theta}\ \frac{-y}{x^2-y^2}\right) \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{-y^2}{(x^2-y^2)^{3/2}} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\, \partial r}\ \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\ \frac{-y}{x^2-y^2}\right) \frac{y}{x^2-y^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\ \frac{-2xy}{(x^2-y^2)^2} \text{ etc.}$$

9.- Verificar el teorema de Euler para:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{y}$$

Solución:

$$f(tx,ty) = \frac{\sqrt{tx+ty}}{ty} = \frac{\sqrt{t}}{t}\sqrt{\frac{x+y}{y}} = t^{-1/2} f(x,y) \Rightarrow m = -1/2$$

$$y:\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} : \quad x\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\ y}{y^2} + y\,\frac{\frac{y}{2\sqrt{x+y}} - \sqrt{x+y}}{y^2} =$$

$$= \frac{x}{2y\sqrt{x+y}} + \frac{y-2(x+y)}{2y\sqrt{x+y}} = \frac{x-2x-y}{2y\sqrt{x+y}} = -\frac{x+y}{2y\sqrt{x+y}} =$$

$$= - \frac{(x+y)\sqrt{x+y}}{2y\,(x+y)} = - \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{x+y}}{y}$$

10.- Si "f" es 2-homogenea demostrar:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2f.$$

Solución:

Al ser "f" 2-homogenea:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f. \quad (*)$$

Pero:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{son 1- homogenea}$$

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Sustituyendo en (*)

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2f.$$

11.- Aplicarlo a $f(x,y) = x^2 \ln \frac{x}{y}$

Solución:

Se deja como ejercicio al lector.

12.- Transformar la expresión diferencial:

$$E = x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} + y$$

Según:

$$x = \frac{1}{t}$$

Solución:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow - t^2 \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

$$y \longrightarrow x \longrightarrow t.$$

Derivando otra vez:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(- t^2 \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(- t^2 \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \left(-2t\frac{dy}{dt} - t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituyendo:

$$E = \frac{1}{t^4}\left(2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{2}{t^3}\cdot\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) + y =$$

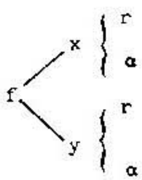
$$= \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2y}{dt^2} + y$$

13.- Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$; con $\quad x = r\cos\alpha$
$\quad y = r\,\text{sen}\,\alpha$

Calcular:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\ .\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

Solución:



$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} =$$

$= 2x\cos\alpha + 2y\,\text{sen}\,\alpha = 2r\cos^2\alpha + 2r\,\text{sen}^2\alpha = 2r.$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0$$

14.- Dado el sistema:

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4$$

$$x\,y\,u\,v = 1$$

Hallar:

1) du, dv.

2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *siendo* $z = (u+v)^2$.

Solución:

1) Diferenciando el sistema.

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2u\,du + 2v\,dv = 0 \qquad =$$

$$y\,uv\,dx + xu\,v\,dy + x\,y\,v\,du + x\,yu\,dv = 0$$

$$u\,du + v\,dv = -(x\,dx + y\,dy)$$

$$xyv\,du + xyu\,dv = -(yuv\,dx + xuv\,dy)$$

$$du = -\begin{vmatrix} xdx + y\ dy & v \\ yuv\ dx + xuv\ dy & xyu \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} u & v \\ xyv & xyu \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{yu(x^2 - v^2)\ dx + xu\ (y^2 - v^2)\ dy}{xy\ (u^2 - v^2)} = -\frac{u(x^2 - v^2)}{x(u^2 - v^2)}\ dx -$$

$$-\frac{u(y^2 - v^2)}{y(u^2 - v^2)}\ dy;\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u\ (x^2 - v^2)}{x\ (u^2 - v^2)}\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{u(y^2 - v^2)}{y\ (u^2 - v^2)}$$

Analogo:

$$dv = -\begin{vmatrix} u & x\ dx + y\ dy \\ xyv & yuv\ dx + xu\ v\ dy \end{vmatrix} \Bigg/ xy\ (u^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{v\ (u^2 - x^2)}{x(u^2 - v^2)}\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v(u^2 - y^2)}{y(u^2 - v^2)}$$

2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2(u+v)\left[\frac{u(v^2-x^2)}{x(u^2-v^2)} + \frac{v(x^2-y^2)}{x(u^2-v^2)}\right]$$

$$z \begin{array}{l} \nearrow u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \searrow v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{array} = -\frac{2uv + 2x^2}{x}\ ;\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2uv + 2y^2}{y}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = -(2uv + 2x^2) + (2uv+2y^2) = 2(v^2-x^2)$$

15.- Comprobar el teorema de Euler para :

$$f(x,y) = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$$

<u>Solución:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt[3]{x^2 + y^2} - (x + y)\ \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{3(x^2+y^2)-2x(x+y)}{3(x^2+y^2)\ \sqrt[3]{x^2+y^2}} -$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + 3y^2}{3(x^2+y^2)\sqrt[3]{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2} - (x+y)\dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} =$$

$$= \frac{3(x^2+y^2) - 2y\ (x+y)}{3(x^2+y^2)\ \sqrt[3]{x^2+y^2}} = \frac{3\ x^2 - 2xy + y^2}{3(x^2+y^2)\ \sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

Así:

$$x\ \frac{\partial f}{\partial x} + y\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2 - 2xy+3y^2)+y\ (3x^2-2xy+y^2)}{3(x^2+y^2)\ \sqrt[3]{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{x^2\ (3y - 2y + x) + y^2\ (3x - 2x + y}{3(x^2 + y^2)\ \sqrt[3]{x^2 + y^2}} = \frac{(x + y)\ (x^2 + y^2)}{3(x^2 + y^2)\ \sqrt[3]{x^2 + y^2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = \frac{1}{3}\ f(\ x,\ y).$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

16.- Dado:

$$f(x,y):\ e^{y} \text{ arc sen } (x - y)$$

¿Que relación liga a $z = f(x,y)$ con $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$?

17.- Dado:

$$f(x,y) = x^{2} \text{ arctg } \frac{y}{x} - y^{2} \text{ arctg } \frac{x}{y} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Demostrar:

1) $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$

2) Existen los parciales de $1^{\underline{er}}$ orden y son continuas en $(0,0)$.

3) No es aplicable Schwartz en $(0,0)$

<u>Nota:</u> Usar polares.

18.- Siendo

$$u = \text{sen } (x + y) \text{ sen } (y + z) \text{ sen } (z + x)$$

Demostrar que:

$$\frac{\partial^{3} u}{\partial x\ \partial y\ \partial z} = 2\cos(2x + 2y + 2z)$$

19.- Obtener la diferencial primera de:

$$u = 27x^{3} - 54x^{2}y + 36xy^{2} - 8y^{3}$$

20.- Dado:

$$u = F(x)\ f(y)\ \Phi(z)\ ,\quad \omega = \psi\ (u)$$

Demostrar que:

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^{2} u}{\partial y\ \partial x}$$

21.- Con igual enunciado comprobar que:

$$\frac{\partial^{2} \omega}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial^{2} \omega}{\partial y\ \partial x}$$

22.- Encontrar el polinomio $P(x,y)$ más general que verifique:

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - 5P = 0$$

23.- Comprobar que para:

$$u = x^3 - 3x^2 y - 2y^3$$

se dá:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$$

24.- Demostrar que si $f(x,y)$ satisface $f'x = f'y$, la función:

$$u = x\, f'x - f$$

satisface:

$$x(u''_{xx} - u''_{yy}) = 2\, u'x.$$

25.- Las ecuaciones $n = f(x,y)$: $v = \Phi(x,y)$ que definen a "u" y "v" como funciones de x,y, definen -por hipótesis- a "x,y" como función de "u" "v" . Demostrar que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v}\right) = 1$$

26.- Siendo z función de "x" e "y" definida por:

$$z = x + y\, f(z)$$

Demostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(z) \frac{\partial z}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(z)\, f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

donde $f(z)$, $\Phi(z)$ son arbitrarias funciones de "z" derivables.

27.- Demostrar que si $F(x,y)$ es 1-homogenea se tiene:

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{y^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{xy} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{x^2}$$

28.- La ecuación $x^y = y^x$ define $y = f(x)$. Calcular:

$$\frac{dy}{dx}$$

29.- Sabiendo que:

$$F\ (x,y) = 0$$

define a:

$$y = f(x)$$

Calcular:

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

30.- El sistema:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$x + y + z = 0$$

Define:

$$y = f(x)$$

$$z = \Phi(x)$$

Calcular:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$$

LECCION . 17

FORMULA DE TAYLOR. APLICACIONES.

Hemos visto anteriormente que la formula de Taylor para una función $y = f(x)$ contínua derivable y de derivada contínua hasta orden "n" nos - sirve para calcular el valor de la función en un punto conociendo el valor de dicha función y sus "n" derivadas en un punto dado "a". Para el - caso de varias variables (en particular nosotros consideramos dos) pretendemos obtener un resultado analogo asi tendremos.

Dada $z = f(x,y)$, si en un entorno del punto (a,b) tiene derivadas - parciales continuas hasta el orden n+1 inclusive, entonces en este entorno es valida la forma.

$$f(x,y) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left[(x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]^{(i)} + R(x,y)$$

nosotros consideramos solo los primeros terminos del desarrollo.

<u>Nota:</u> El binomio que aparece en la sumatoria es un binomio simbolico - para aclarar el significado consideramos el caso $i = 2$.

$$\left((x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2$$

<u>Máximos y Mínimos.</u>

Al igual que en la función de una variable diremos que la función $f(x,y)$ presenta un máximo (mínimo) en un punto x_0, y_0 si se verifica que

$$f(x_0,y_0) > f(x_0 + h, y_0 + k) (f(x_0,y_0) < f(x_0+h, y_0+k) \quad \forall h,k.$$

La condición necesaria para que exista un máximo y minimo es que - las derivadas parciales primeras respecto a cada una de las variables - sea nula.

Hessiano. Dada una función de "n" variables se llama Hessiano a determinante funcional formado por las derivadas parciales segunda, es decir - si :

$$z = f(x_1, x_2 \dots . x_n)$$

su Hessiano seria:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \dots\dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_1} & \dots\dots\dots\dots & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Condición Suficiente. (Para funciones de dos variables). Dada una función $z = f(x,y)$ la condición suficiente para que exista maximo(minimo) - es que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$$

y Hessiano en dicho punto sea mayor cero ($\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ y Hessiano sea positivo). Es decir:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(x_0,y_0)} > 0 \qquad H = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0)} > 0$$

entonces hay minimo.

Si:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(x_0,y_0)} < 0 \qquad H > 0 \text{ entonces hay maximo.}$$

Se pueden dar otros resultados como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0 \quad y \quad H = 0$$

entonces decimos que en el punto (x_0,y_0) hay un casi máximo.

$$\text{Si} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 y_0) > 0 \qquad H = 0$$

entonces (x_o, y_o) es un casi-mímimo.

Y si $H < 0$ entonces tenemos un punto de silla.

Generalización al caso de "n" variables. Si $f(x_1,x_2 \ldots x_n)$ es una función de "n" variables para obtener los maximos y minimos tendremos que anular los derivados parciales primeros es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \ \ldots\ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Para estudiar la condición suficiente debemos considerar la sucesión de los signos de los Hessianos:

$$H_1 = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{(x_0,y_0)} \qquad H_2 = \left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{matrix}\right|_{(x_0,y_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ H_n = \left|\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{matrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Si:

$$H_1 > 0 \quad H_2 > 0 \ \ldots\ldots\ H_n > 0 \qquad \text{minimo en } (x_0,y_0)$$

$H_1 < 0 \quad H_2 > 0 \quad H_3 < 0 \ldots$

alternado y el primero negativo-máximo.

Máximos y mínimos condicionados. Hasta ahora hemos considerado los máximos y mínimos de una función $f(x,y)$ para "x e y" cualquiera. Pero hay una serie de problemas en donde nos interesa que las variables estén ligadas. En este caso se trara de estudiar los máximos y mínimos de $f(x,y)$ sujeto a la condición $\Phi(x,y) = 0$.

Para resolver este problema podemos despejar una de las variables en la condición por ejemplo:

$$y = g(x)$$

y sustituir en la función, y calcular los máximos y mínimos de:

$$f(x,g(x))$$

o podemos aplicar los multiplicadores de Lagrange que se basan en el siguiente teorema.

Dada una función $f(x,y)$ con la condición $\Phi(x,y) = 0$, hallar los máximos y mínimos es igual que estudiar los máximos y mínimos de una nueva función $\emptyset(x,y)$ donde:

$$\emptyset(x,y) = f(x,y) - \lambda\, \Phi(x,y).$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Hallar el desarrollo de:

$$z = (1 + x + y)^{1/2}$$

alrededor del punto (0,0) y utilizarlo para calcular:

$$\sqrt{1,2}$$

Solución:

$$z = \sqrt{1 + x + y} \qquad z\,(0,0) = \sqrt{1} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y+1}} \;;\; \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{2} \;;\; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+y+1}}}{x+y+1} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+y+1)^{3/2}} \;;\; \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} =$$

$$= -\frac{1}{4} \;;\; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{4} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{4}$$

por tanto escribiendo solo los 3 primeros terminos:

$$\sqrt{1+x+y} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}y^2 - \frac{2}{8}xy.$$

si hacemos $x = 0{,}2$; $y = 0$ tenemos:

$$\sqrt{1{,}2} = 1 + \frac{1}{2}\,0{,}2 - \frac{1}{8}\,0{,}04 = 1{,}095.$$

2.- Desarrollar alrededor del punto (1,1) la función:

$$z = \ln\,(3 - x - y)$$

Solución:

$$z = (1,1) = \text{Ln}\ (3-1-1) = \text{Ln}\ 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{3-x-y}\Bigg|_{(1,1)} = -1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Bigg|_{(1,1)} = -1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1}{(3-x-y)^2} = -1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = -1$$

La derivada son negativas $= -(n-1)!$

Así: $\text{Ln}(3-x-y) = -\frac{1}{1}((x-1)+(y-1)) - \frac{1}{2}((x-1)^2+(y-1)^2+2(x-1)(y-1)) -$
$- \ldots = -(x+y-2) - \frac{1}{2}(x+y-2)^2 - \frac{1}{3}(x+y-2)^3 - \frac{1}{4}(x+y-2)^4 - \ldots\ldots$

3.- Obtener hasta los terminos de segundo orden inclusive el desarrollo de la función:

$$z = x^y$$

en el punto (2,1).

Solución:

$$z(2,1) = 2^1 = 2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\ x^{y-1} \quad \frac{\partial z}{\partial x}\Bigg|_{(2,1)} = 1\ x^0 = 1;\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ \text{Ln}x;\ \frac{\partial z}{\partial y}\Bigg|_{(2,1)} = 2\ \text{Ln}\ 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = y(y-1)\ x^{y-2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Bigg|_{(2,1)} = 0\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = x^{y-1} + y\ x^{y-1}\ \text{Ln}\ x\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}\Bigg|_{(2,1)} = 1 + \text{Ln}\ 2\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y\ \text{Ln}^2 x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Bigg|_{(2,1)} = 2\ \text{Ln}^2\ 2.$$

$$z = x^y = 2 + (x-2) + 2\ \mathrm{Ln}2(y-1) + \frac{1}{2!}\left| 2\ (1+\mathrm{Ln}2)(x-2)(y-1) + 2\mathrm{Ln}^2 2(y-1)^2 \right|$$

4.- Encontrar el desarrollo en serie de la función "z" definida implícitamente por:

$$z^3 + 3zx + y^2 = 0$$

alrededor del punto (3,0,-3).

Solución:

$$z\ (0,3) = -3.$$

$$3z^2\ z'_x + 3xz'_x + 3z = 0 \qquad z'_x = \frac{-3z}{3z^2+3x}\ ;\ z'_x \Big|_{(3,0,-3)} = \frac{+9}{27+9} = +\frac{1}{4}$$

$$3z^2\ z'_y + 3xz'_y + 2y = 0 \qquad z'_y = \frac{-2y}{3z^2+3x} \qquad z'_y \Big|_{(3,0,-3)} = 0.$$

$$z''_{x^2} = \frac{-3z'_x(3z^2+3x) + (6zz'_x+3)3z}{(3z^2+3x)^2} \qquad z''_{x^2}\Big|_{(3,0,-3)} = \frac{-54}{4.36^2} = \frac{-1}{96}$$

$$z''_{xy} = \frac{-3z'_y(3z^2+3x) + 3z\ (6zz'_y)}{(3z^2+3x)^2}\ ;\ z''_{xy}\Big|_{(3,0,-3)} = 0$$

$$z''_{y^2} = \frac{-2\ (3z^2+3x) + 2y(6zz'_y)}{(3z^2+3x)^2}\ ;\ z''_{xy}\Big|_{(3,0,-3)} = \frac{-2(36)}{36^2} = -\frac{1}{18}$$

Por tanto:

$$z = -3 + \frac{1}{4}\cdot(x-3) + \frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{-1}{96}(x-3)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\ .\ 0\ (x-3)\ y - \frac{1}{18}\ y^2\right] + \ldots.$$

5.- Encontrar el desarrollo:

$$z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

en el punto (1,1).

<u>Solución:</u>

$$z(1,1) = \ln 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = -1; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{2}{x^3}; \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{(1,1)} = 2$$

$$\left.\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right|_{(1,1)} = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

De la nisma manera $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = (-1)^n (n-1)!$ y las derivadas cruzadas son todas nulas.

$$\ln\frac{x}{y} = (x-y)-(y-1)+\frac{1}{2!}\left[-(x-1)^2+(y-1)^2\right]+\frac{1}{3!}\left[2(x-1)^3-2(y-1)^3\right]+\dots$$

$$\frac{1}{n!}\left[(-1)^{n+1}(n-1)!(x-1)^n+(-1)^n(n-1)!(y-1)^n\right] =$$

$$= x-y+\frac{1}{2}\left[2x-2y+y^2-x^2\right]+\dots\ \frac{1}{n}\left[(-1)^{n+1}(x-1)^n+(-1)^n(y-1)^n\right]+\dots$$

6.- Hallar los máximos y mínimos de z:

a) $z^3+2(x+y)z+2(x^2+y^2)-1 = 0$ *b)* $z = y^4-4xy^2+4x^2+1$

Solución:

a) $$2z^3 + 2z(x+y) + 2(x^2+y^2) - 1 = 0$$

$$6z^2\, z'_x + 2z'_x(x+y) + 2z + 4x = 0 \qquad z'_x = \frac{-2z-4x}{6z^2+2(x+y)} = 0$$

$$6z^2\, z'_y + 2z'_y(x+y) + 2z + 4y = 0 \qquad z'_y = \frac{-2z-4y}{6z^2+2(x+y)} = 0$$

$$x = y$$

$$2z = -4x \qquad z = -2x = -2y \qquad -16y^3 - 8y^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

$$-16y^3 - 4y(2y) + 4y^2 - 1 = 0 \qquad -16y^3 - 4y^2 - 1 = 0$$

$$y = -\frac{1}{2} \qquad z = 1 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

	16	4	0	1
$-\frac{1}{2}$		−8	+2	−1
	16	−4	+2	0

$$16y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4-32}}{16}$$

Compleja.

Por tanto el punto a estudiar sería $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$z''_{x^2} = \frac{(-2z'_x-4)(6z^2-2(x+y)-(12z'_x+2)(-2z-4x)}{[6z^2+2(x+y)]^2} \; ; \; z''_{x^2}\Big]_{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)} =$$

$$= \frac{-24}{16} < 0.$$

$$z''_{y^2}\Big]_{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)} = -\frac{3}{2}\,;\; z''_{xy} = \frac{-2z'_y(6z^2+2(x+y)-(12z'_y+2)(-2z-4x)}{6z^2+2(x+y)}$$

$$z''_{xy}\Big]_{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)} = 0$$

$$z''_{x^2} \quad 0$$

$$M = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} > 0 \quad \text{en } (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad 1)$$

Hay máximo.

b) $$z = y^4 - 4xy^2 + 4x^2 + 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4y^2 + 8x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8xy = 0 \Rightarrow (4y^2 - 8x)\, y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Debemos estudiar el punto (0,0,1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8. \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -8y. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 8 > 0.$$

en (0,0,1)hay un casi-mínimo.

$$M = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7.- Encontrar los maximos y minimos de la función con las res - tricciones que se indican:

a) $x^2+2y^2+8x+2y+3 \qquad x^2+y^2 = 5$

b) $n = x^2+y^2+z^2 \qquad x+y+z = N$ *(donde N es constante).*

Solución:

a) Construimos $\phi(x,y) = x^2+2y^2+8x+2y+3-\lambda(x^2+y^2-5)$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x+8-2x\lambda = 0 \qquad 2x(\lambda-1) = 8 \qquad x = \frac{4}{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 4y+2-2\lambda y = 0 \qquad 2y(\lambda-2) = 2 \qquad y = \frac{1}{\lambda-2}$$

$$x^2+y^2 = 5 \qquad \frac{16}{\lambda^2+1-2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2+4-4\lambda} = 5 \qquad 5\lambda^4-30\lambda^3+48\lambda^2-6\lambda-45 = 0$$

ecuación que admite la solución: $\lambda = 3$

$$x = \frac{4}{\lambda-1} = \frac{4}{3-1} = 2 \qquad y = \frac{1}{3-2} = 1 \qquad z = 5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 - 2\lambda = 2-6 = -4 < 0.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 - 2\lambda = 4-6 = -2 \qquad H = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

En el punto (2,1) hay máximo.

b) Construimos la función:

$$\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - N).$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \qquad x = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 \qquad y = \frac{\lambda}{2} \quad x = y = z \quad x+y+z = N = \quad x = y = z = \frac{N}{3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z - \lambda = 0 \qquad z = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 2$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \qquad H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \qquad \frac{N}{3}, \frac{N}{3}, \frac{N}{3}$$

Hay mínimo.

También se podría haber despejado $z = N - x - y$,y sustituir en la función.

8.- Hallar los máximos y mínimos de: $u = x \cdot y \cdot z$, *condicionado:* $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x + y + z = 0$

Solución:

$$\phi\,(x,y,z) = x \cdot y \cdot z - \lambda\,(x^2+y^2-1) - \mu\,(x+y+z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = yz - 2\lambda x - \mu = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xz - 2\lambda y - \mu = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy - 2\lambda z - \mu = 0$$

De las dos primeras $x = y$; $\quad 2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + x^2 + 4x^2 = 6x^2 = 1 \qquad x = \frac{1}{\sqrt{6}} = y \qquad z = -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{6}} = y \qquad z = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

De la misma forma podemos calcular los puntos.

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad y = -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad z = \frac{1}{\sqrt{6}} \;, \quad x = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$x = -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad z = \frac{1}{\sqrt{6}} \;, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad y = \frac{2}{\sqrt{6}} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Veamos el Hessiano.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2\lambda \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y} = z \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial z} = y$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\,\partial x} = z \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\lambda \qquad \frac{\partial^2 \phi}{y \quad z} = x$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z\,\partial x} = y \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z\,\partial y} = x \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2\lambda$$

Y para $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ calculamos el valor de λ .

$$-\frac{2}{6} - \frac{2\lambda}{\sqrt{6}} - \mu = 0$$

$$\frac{1}{6} + \frac{4\lambda}{\sqrt{6}} - \mu = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{6\lambda}{\sqrt{6}} = 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = +\frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} > 0$$

$$\begin{vmatrix} -2\lambda & z \\ z & -2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - z^2 = 4.\,\frac{1}{4.6} - \frac{4}{6} = -\frac{3}{6} < 0$$

9.- *De todos los paralelipedos de volumen "V" cual es el que - tiene la superficie mínima.*

Solución:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

$$\text{Area} = 2\,(ab + bc + ac)$$

Construimos la función:

$$\phi\ (a,b,c) = 2(ab + bc + ac) - \lambda(a,b,c - v)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = 2b + 2c - \lambda bc = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial b} = 2a + 2c - \lambda ac = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 2b + 2c - \lambda ab = 0$$

$a = b = c$; el paralelipedo de area extrema es el cubo.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial a^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial a\, \partial b} = 2 - \lambda c \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial a\, \partial c} = 2 - \quad b.$$

10.- Hallar la distancia mínima entre la parábola

$$y = x^2$$

y la recta:

$$x - y - 2 = 0.$$

Solución:

Sea $(x_1\ y_1)$ un punto de $y = x^2$; (x_2, y_2) un punto $x-y-2 = 0$ la distancia - sería:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2$$

$$y_1 = x_1^2 \qquad y_2 = x_2 - 2 \qquad d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2 + 2)^2$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial x_1} = 2\ (x_1 - x_2) + 2\ (x_1^2 - x_2 + 2)\ 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial x^2} = -\ 2\ (x_1 - x_2) - 2\ (x_1^2 - x_2 + 2) = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 - 2x_1^2 + 2x_2 - 4 = 0$$

$$2x_2 = x_1^2 + x_1 + 2$$

Sustituyendo en la otra ecuación resulta:

$$2x_1^3 - 3x_1^2 + 5x_1 - 2 = 0$$

ecuación que admite la raiz:

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

y dos raices complejas. Luego los puntos que buscamos serán:

$$y_1 = x_1^2 = \frac{1}{4} ; \left(\frac{1}{2} , \frac{1}{4} \right)$$

$$2x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{1 + 2 + 8}{4} = \frac{11}{4} \quad x_2 = \frac{11}{8} \quad y_2 = \frac{11}{8} -2 = -\frac{5}{8}$$

$$d^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{4 - 11}{8}\right)^2 + \left(\frac{2 + 5}{8}\right)^2 = 2 \cdot \frac{49}{64}$$

$$d = \frac{7}{8} \sqrt{2}$$

Para comprobar que efectivamente es mínima:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 2 + 8x_1 - 4x_2 + 8 = 2 + 4 - \frac{11}{2} + 8 > 0$$

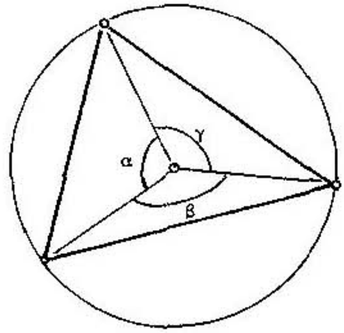
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 - 4x_1 = -2 - 2 = -4 \qquad H > 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 4 \qquad \text{c.q.d.}$$

y por tanto hay mínimo.

11.- De todos los triangulos inscrito en un circulo de radio R.- Hallar el de area máxima.

Solución:



Considerando el centro del circulo se descompone el triangulo en - tres triangulos isosceles. El area de cada uno de estos triangulos seria.

$$R\cos\frac{\alpha}{2}\ \text{sen}\ \frac{\alpha}{2}\ ;\ R\cos\frac{\beta}{2}\ \text{sen}\ \frac{\beta}{2}\ ;\ R\cos\frac{\gamma}{2}\ \text{sen}\ \frac{\gamma}{2}$$

Por tanto se trata de maximizar.

$$A = \frac{R}{2}\left[\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta + \text{sen}\ \gamma\right] \text{ sujeta a } \alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

Construimos la función:

$$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{R}{2}(\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta + \text{sen}\ \gamma) -$$

$$- \lambda(\alpha + \beta + \gamma + - 2\pi)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} = \frac{R}{2}\cos\alpha - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = \frac{R}{2}\cos\beta - \lambda = 0 \qquad \alpha = \beta = \gamma$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} = \frac{R}{2}\cos\gamma - \lambda = 0 \qquad \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \qquad 3\alpha = 2\pi;\ \alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^{\circ}$$

Por tanto se trata del triangulo equilatero.

12.- Hallar la distancia desde el punto (1,1,1) al plano: $$x + y + 2z - 3 = 0$$

Solución:

$$d^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

minimizar d ó d^2 es lo mismo, por tanto se trata de hallar mínimo de:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

sujeto a:

$$x + y + 2z - 3 = 0$$

Por tanto construimos:

$$\phi\ (x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - \lambda(x+y+2z-3) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2(x-1) - \lambda = 0 \qquad x = \frac{\lambda}{2} + 1 = \frac{\lambda + 2}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2(y-1) - \lambda = 0 \qquad y = \frac{\lambda + 2}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2(z-1) - 2\lambda = 0 \qquad z = \lambda + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\lambda + 2 + 2\lambda + 2 - 3 = 0 \qquad 3\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x\, \partial y} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x\, \partial z} = 0\ ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^2} = 2 > 0\ .$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2\ ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial z} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z\, \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z\, \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Luego para:

$$x = y = \frac{5}{6} \quad ; \quad z = \frac{2}{3}$$

d^2 es mínima:

$$d^2 = (\frac{5}{6} - 1)^2 + (\frac{5}{6} - 1)^2 + (\frac{2}{3} - 1)^2 + (\frac{2}{3} - 1)^2 =$$

$$= \frac{6}{36} \qquad d = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

13.- Desarrollar en serie de Taylor hasta los terminos de segundo orden

$$z = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}$$

en el entorno (1,1) utilizando para calcular:

$$\sqrt{1{,}03}\ \ \sqrt[3]{0{,}98}$$

Solución:

$$Z = 1+ \frac{1}{2}(x-1)+ \frac{1}{3}(y-1)+ \frac{1}{2!}\left[- \frac{1}{4}(x-1)^2+ \frac{1}{3}(x-1)(y-1) - \frac{2}{9}(y-1)^2\right]$$

14.- Desarrollar e^{x-y} en potencias de x-1 e y-1.

Solución:

$$e^{x-y} = 1 + (x-1) - (y-1) + \frac{1}{2!}\left[(x-1) - (y-1)\right]^2+\ldots\frac{1}{n!}\left[(x-1) -(y-1)\right]^n+\ldots$$

15.- Hallar el valor de "p" para que la función:

$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4yx - 14x + 12y + p = 0$$

tenga un máximo que valga 0.

Solución: P = 3.

16.- Hallar máximo y mínimo :

a) $z= 8xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ b) $z = 2x^2 - 2yx - 2x - y^2 + 4y + 9$

Solución:

a) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ mínimo, b) No hay ni máximo ni mínimo.

17.- Se quiere construir una piscina con un volumen de 1.000 m^3 .Supuesto que el precio del suelo es doble que el de las paredes. Hallar las dimensiones para el coste de la piscina sea mínimo.

Solución:

$$5\sqrt[3]{4}\ ;\ 5\sqrt[3]{4}\ ;\ \ 10\sqrt[3]{4}$$

18.- Hallar la distancia mínima del punto (0,1) a la paralela $y = x^2$..

Solución: $d = 1.$

19.- Hallar la distancia del punto 1 ó -1, al plano:

$$3x + 2y - z + 1 = 0.$$

Solución:

$$d = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

20.- Inscribir en un elipsoide un paralepipedo de volumen máximo.

Solución:

$$\frac{2a}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{2b}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{2c}{\sqrt{3}}$$

21.- Estudiar maximo y mínimo de:

$$z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$$

Solución: Infinitos maximos.

22.- Se tiene un diamante de peso P y se desea partirlo en tres trozos - si el precio del diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Hallar el peso de cada parte para que la depreciación sea máxima.

Solución: Los tres trozos iguales.

LECCION. 18

INTEGRALES CURVILÍNEAS.

<u>Definición:</u>

Sea $\widehat{AB}$, un arco de curva rectificable γ , de ecuación:

$$f(x,y,z) = 0 \qquad g(x,y,z) = 0$$

y sean:

$$P(x,y,z) \qquad Q(x,y,z) \qquad R(x,y,z)$$

funciones continuas sobre γ .

LLamamos integral curvilínea del vector $\vec{V}$, de componentes $P(x,y,z)$, - $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ a la expresión:

$$I = \int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds}$$

donde $\overline{ds}$ es el elemento diferencial de arco orientado, de componentes -

$$\overrightarrow{ds} \equiv (dx,\ dy,\ dz)$$

$$I = \int_{\widehat{AB}} \vec{V}\, \overrightarrow{ds} = {}_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz \qquad (1)$$

<u>Cálculo:</u>

Sea $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ una representación paramétrica de la curva γ, con $A(t = t_0)$; $B(t = t_1)$.

Tomando en (1) valores sobre la curva γ.

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t),y(t),z(t)\, x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + $$

$$+ R(x(t),y(t),z(t))\, z'(t)]\, dt$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$$

Función Potencial:

Si existe una función $U(x,y,z)$ tal que $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z)$; $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z)$;

$\frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$, función que llamamos función potencial.

La integral (1) podemos escribirla como:

$$I = \int_{\widehat{AB}} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy + \frac{\partial U}{\partial z}\, dz = \int_{\widehat{AB}} dU = U(B) - U(A)$$

Para que exista esta función potencial debe cumplirse que:

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x};\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Calcular la integral curvilínea:

$$\oint_\gamma xdy - ydx$$

a lo largo de la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

1ª Solución:

Escribimos la elipse en coordenadas paramétricas

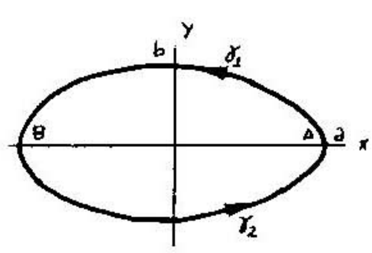
$$x = a\cos t \qquad dx = -a \operatorname{sen} t\, dt$$

$$y = b \operatorname{sen} t \qquad dy = b \cos t\, dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\operatorname{sen} t \cdot a \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} ab\, dt = 2\pi ab$$

2ª Solución:



Despejando "y" en la ecuación de la elipse:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} =$$

$$= \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$I = \oint_\gamma xdy - ydx = \int_{A,\gamma_1}^{B} xdy - ydx + \int_{B,\gamma_2}^{A} xdy - ydx$$

La curva γ_1, es la determinación positiva:

$$y = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{con} \quad dy = \frac{b}{a}\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx$$

La curva γ_2, es la determinación negativa:

$$y = - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{con} \quad dy = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

Sustituyendo en las integrales:

$$I = \int_a^{-a}\left(x\,\frac{b}{a}\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx + \int_{-a}^{a}\left(x\,\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$$

$$I = -\frac{b}{a}\int_a^{-a}\left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2}\right)dx + \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2}\right)dx =$$

$$= 2\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$I = a^2\,2\,\frac{b}{a}\left[\text{arc sen}\,\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} = 2ba\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi ba.$$

2.- Calcular la integral curvilínea:

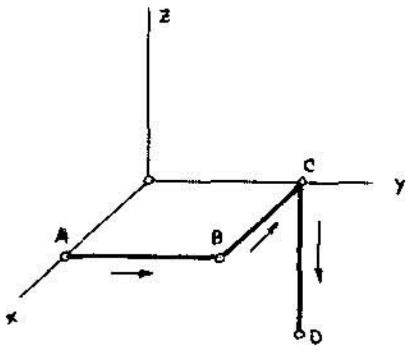
$$\int_\gamma \frac{y}{1-z}\,dx + \frac{x\,dy}{1-z} + \frac{xy\,dz}{(1-z)^2}$$

a lo largo de la quebrada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ con $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,1,-1)$.

Solución:

Llamando γ, a la quebrada:

$$I(\gamma) = I\,(AB) + I\,(BC) + I\,(CD)$$



$$I\,(AB) = \int_{\overline{AB}\,A}^{B} \frac{y}{1-z}\,dx + \frac{xdy}{1-z} + \frac{xy\,dz}{(1-z)^2}$$

$$\overline{AB} \begin{cases} x = 1 \longrightarrow dx = 0 \\ z = 0 \longrightarrow dz = 0 \end{cases} \quad \text{y varía entre} \quad \begin{matrix} y(A) = 0 \\ y(B) = 1 \end{matrix}$$

$$I(AB) = \int_0^1 0 + 1dy + 0dz = y\Big|_0^1 = 1$$

$$I\,(BC) = \int_{\overline{BC}\,B}^{C} \frac{y}{1-z}\,dx + \frac{xdy}{1-z} + \frac{xy\,dz}{(1-z)^2}$$

$$\overline{BC} \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{x varía entre} \quad \begin{matrix} x(B) = 1 \\ x(C) = 0 \end{matrix} \quad x = 1$$

$$I\,(BC) = \int_1^0 \frac{1}{1}\,dx + 0 + 0 = \int_1^0 dx = -1$$

$$I\,(CD) = \int_{\overline{CD}\,C}^{D} \frac{y}{1-z}\,dx + \frac{xdy}{1-z} + \frac{xy\,dz}{(1-z)^2}$$

$$\overline{CD} \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{z varía entre} \quad \begin{matrix} z(C) = 0 \\ z(D) = 1 \end{matrix}$$

$$I\ (CD) = \int_0^1 (0 + 0 + 0)\ dz = 0$$

Así que:

$$I(\gamma) = 1 - 1 + 0 = 0$$

<u>2ª Solución:</u>

Veamos si la función subintegral admite función potencial:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1-z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{1-z}\right) = \frac{y}{(1-z)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{(1-z)^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{1-z}\right) = \frac{x}{(1-z)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{(1-z)^2}\right)$$

Luego admite función potencial.

Calculemos dicha función potencial $U(x,y,z)$:

$$U(x,y,z) = \int \frac{y}{1-z}\, dx + \psi(y,z) = \frac{yx}{1-z} + \psi(y,z)$$

Derivamos respecto a "y" para calcular $\psi(y,z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{1-z} = \frac{x}{1-z} + \psi'_y(y,z) \qquad \psi'_y(y,z) = 0 \qquad \psi(y,z) = \Phi(z)$$

Derivando ahora $U(x,y,z) = \dfrac{xy}{1-z} + \Phi(z)$, respecto de z, para calcular $\Phi(z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{xy}{(1-z)^2} = \frac{xy}{(1-z)^2} + \Phi'(z) \qquad \Phi'(z) = 0 \qquad \Phi(z) = K \qquad U(x,y,z) = \frac{xy}{1-z}$$

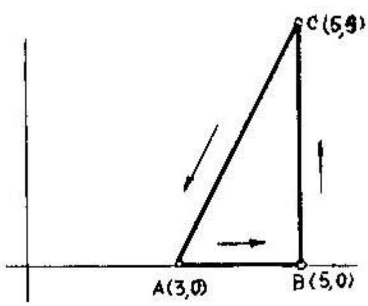
Esta función solo es discontinua en $z = 1$, que no pertenece al camino de integración y, ni éste lo rodea, así pues:

$$\int_A^D \frac{y}{1-z}\,dx + \frac{x}{1-z}\,dy + \frac{xy}{(1-z)^2}\,dz = \int_A^D d\left(\frac{xy}{1-z}\right) =$$

$$= \left(\frac{xy}{1-z}\right)_A^D = 0 - 0 = 0$$

> *3.- Calcular la integral curvilínea:*
>
> $$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$
>
> *a lo largo de la quebrada ABCA, siendo A(3,0), B(5,0) c(5,4)*

1ª Solución:



La integral pedida puede escribirse como:

$$I = I(AB) + I(BC) + I(CA)$$

$$I(AB)_{\overline{AB}} = \int_A^B \frac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$AB : y = 0$$

variando x entre x(A) = 3, x(B) = 5:

$$I(AB) = \int_3^5 0\,dx = 0$$

$$I(BC)_{\overline{BC}} = \int_B^C \frac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$\overline{BC}$: x = 5, dx = 0; variando "y" entre y(B) = 0 a y(C) = 4

$$I(BC) = \int_0^4 \frac{5dy}{5\sqrt{5^2 - y^2}} = \int_0^4 \frac{dy}{\sqrt{5^2 - y^2}} = \left[\text{arc sen } \frac{y}{5}\right]_0^4 =$$

$$= \text{arc sen } \frac{4}{5}$$

$$I\ (CA) \underset{\overline{CA}}{=} \int_C^A \frac{xdy - ydx}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$

CA : $y = 2(x - 3)$; $dy = 2dx$, variando x entre $x(C) = 5$, $x(A) = 3$:

$$I(CA) = \int_5^3 \frac{2x - 2\ (x - 3)}{x\sqrt{x^2 - 4(x-3)^2}}\,dx = \int_5^3 \frac{6\ dx}{x\sqrt{-3x^2 + 24x - 36}} = (*)$$

Para calcular esta integral hacemos $x = 1/t$ con lo cual:

$$6\int \frac{t \cdot \frac{-1}{t^2} \cdot dt}{\sqrt{\frac{-3}{t^2} + \frac{24}{t} - 36}} = \frac{-6}{\sqrt{3}} \int \frac{-dt}{\sqrt{-1 + 8t - 12t^2}} = -2\sqrt{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{3} - \left(\frac{6t - 2}{\sqrt{3}}\right)^2}} =$$

$$= -\text{arsen}(6t - 2)$$

Luego volviendo a (*) tendremos:

$$(*) = -\text{ arsen } \left(\frac{6}{x} - 2\right)\Big|_5^3 = \text{arsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

Por lo tanto: $I = 0 + \text{arsen } \left(\frac{4}{5}\right) + \text{arsen } \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$

<u>2ª Solución:</u> Comprobemos que admite función potencial:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{-\sqrt{x^2-y^2} + y\,\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}}{(x^2 - y^2)} = \frac{1}{x}\,\frac{-x^2}{(x^2 - y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = -\frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}$$

Luego admite función potencial. Calculemos U(x,y):

$$U(x,y) = \int \frac{x}{x\sqrt{x^2-y^2}}\,dy + \psi(x) = \int \frac{\frac{dy}{x}}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}} + \psi(x) =$$

$$= \text{arc sen } \frac{y}{x} + \psi(x)$$

Derivando respecto a "x" para encontrar $\psi(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{-y}{x^2}}{\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}} + \psi'(x) \qquad \psi'(x) = 0 \qquad \psi(x) = k$$

Así pues:

$$U(x,y) = \text{arc sen } \frac{y}{x}$$

que es continua sobre la curva AB CA y dentro del recinto limitado por la misma.

$$I = \int_A^A dU(x,y) = 0$$

4.- a) Calcular "a" para que:

$$(x-y^2+1)\,e^{x+y}dx + (x-y^2-ay)e^{x+y}dy$$

sea diferencial exacta.

b) Con este valor de "a", hallar la integral curvilínea de esta función entre (0,2) y (1,1).

Solución:

a) Para que sea diferencial exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((x-y^2+1)e^{x+y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((x-y^2-ay)e^{x+y}\right)$$

$$-2ye^{x+y} + (x-y^2+1)e^{x+y} = e^{x+y} + (x-y^2-ay)e^{x+y}$$

$$e^{x+y}(x-y^2+1-2y) = e^{x+y}(1+x-y^2-ay), \quad a = 2$$

b) Calculemos U(x,y):

$$U(x,y) = \int (x-y^2 + 1)e^{x+y}dx + \psi(y) = e^y \int (x-y^2 + 1)e^x dx + \psi(y) \; ,$$

$$U(x,y) = e^y \; ((x-y^2 + 1)e^x - e^x) + \psi(y) = e^{+y} \; (x-y^2) + \psi(y)$$

Derivando respecto a "y", para calcular $\psi(y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = (x-y^2-2y)e^{x+y} = e^{x+y} \; (x-y^2) + e^{x+y}(-2y) + \psi'(y) \qquad \psi'(y) = 0$$

$$\psi(y) = k$$

$$U(x,y) = e^{x+y} \; (x - y^2)$$

$$I = \int_{(0,2)}^{(1,1)} (x-y^2+1)e^{x+y}dx + (x-y^2-2y)e^{x+y}dy = \int_{(0,2)}^{(1,1)} d(e^{x+y}(x-y^2)) =$$

$$= \left[e^{x+y}(x-y^2)\right]_{(0,2)}^{(1,1)}$$

$$I = 4 \; e^2$$

5.- Hallar el valor de la integral curvilínea:

$$\int_{\gamma} xy \; dx + (x^2-y^2) \; dy + yz \; dz$$

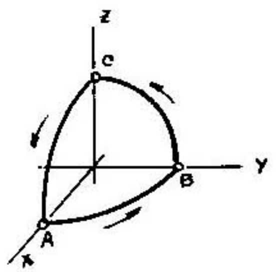
siendo "γ" la curva formada por la intersecciones de la esfera -

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

con los planos $z = 0$, desde $A(1,0,0)$ a $B(0,1,0)$, $x = 0$, desde - $B(0,1,0)$ a $C(0,0,1)$, $y = 0$, desde $C(0,0,1)$ a $A(1,0,0)$.

Solución:

$$I(\gamma) = I(AB) + I\;(BC) + I\;(CA)$$



$$I(AB)_{\overline{AB}} = \int_A^B xydx + (x^2-y^2)dy + yzdz$$

$$\overline{AB} : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$z = 0$$
$$x = \cos t$$
$$y = \text{sen } t$$

$$A(t = 0) \qquad B(t = \frac{\pi}{2})$$

$$I(AB) = \int_0^{\pi/2} (\cos t \text{ sen } t(-\text{sen}t) + (\cos^2 t - \text{sen}^2 t)\cos t) dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^3 t - 2\text{sen}^2 t \cos t)\, dt$$

$$I\ (AB) = (\text{sen } t - \text{sen}^3 t)\Big|_0^{\pi/2} = 0$$

$$I(BC)_{\overline{BC}} = \int_B^C xy\ dx + (x^2 - y^2)\ dy + yz\ dz$$

$$\overline{BC} : \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \cos t \\ z &= \text{sen } t \end{aligned} \qquad B(t = 0), \qquad C(t = \frac{\pi}{2})$$

$$I(BC) = \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t(-\text{sen}t) + \text{sen}t \cos t \cos t)\ dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t \text{ sen}t\ dt =$$

$$= \left[-\frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi/2}$$

$$I(BC) = \frac{2}{3}$$

$$I(CA)_{\overline{CA}} = \int_C^A xy\ dx + (x^2-y^2)dy + yz\ dz$$

$$\overline{CA} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = 0 \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$C(t = \frac{\pi}{2}) \quad ; \quad A\ (t = 0)$$

$$I(CA) = \int_{\pi/2}^{0} 0\ dt = 0$$

$$I = 0 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

6.- Calcular la integral curvilínea:

$$\oint y\,dx + 2dy + xdz$$

a lo largo de la trayectoria ABCA, siendo $\widehat{AB}$ un arco de circunferencia - de centro, el origen desde $A(1,0,0)$ al $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $\widehat{BC}$ un arco de centro de origen desde B a $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\widehat{CA}$ un arco de circunferencia de centro el origen, desde C a A.

Solución:

Los arcos son $\widehat{AB}: \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $\widehat{BC}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ $\widehat{CA}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,z \end{cases}$

$$I = \frac{\pi + \sqrt{2}}{8} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$$

7.- Comprobar si admite función potencial la expresión:

$$(2xy^3 + 3)\,dx + (3x^2y^2 - 2y)\,dy$$

Calcular la integral curvilínea de dicha expresión entre (0,0) y (1,2).

Solución:

$$I = 7$$

8.- Hallar a,b en: $(axy^3 + bxy)\,dx + ((a+1)x^2y^2 + (b-1)x^2 + 3y^2)\,dy$

para que $\int_{\overline{AB}} (axy^3 + bxy)\,dx + (a+1)x^2y^2 + (b-1)\,x^2 + 3y^2)\,dy$

no dependa del camino elegido. Calcular la integral si A(1,1), B(2,3).

Solución:

$$a = 2 \;;\quad b = 2 \;;\quad I =$$

9.- Comprobar que la función:

$$- \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

admite función potencial. Calcular la integral curvilínea de la función dada a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, directamente y a través de la función potencial. ¿Porque no son iguales?

Solución:

$$U(x,y) = \text{arc tg}\, \frac{y}{x} \qquad \int - \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = 2\pi .$$

10.- Una partícula está sometida a un campo de fuerza radial, con dirección y sentido hacia el origen, de manera que a una distancia "r" del origen, el módulo del campo es Kr^n donde K,n, son constantes.

a) Calcular el trabajo que hay que realizar contra las fuerzas del campo para llevar la partícula desde un punto, a una distancia r_0, a otro a una distancia r_1, alineados ambos con el origen.

b) ¿Para que valores de K y n este trabajo no depende del camino elegido entre r_0 y r_1? .¿Que valor tiene la función potencial en este caso?

Solución:

El campo de Fuerza es $\bar{F} = - Kr^{n-1}\, \bar{r}$. Para $\bar{r} = (x,y,z)$

a) $W = \int \bar{F}\, \overline{dr}$ con $\bar{F} \,//\, \overline{dr}$, $W = \frac{K}{n+1}(r_1^{\,n+1} - r_0^{\,n+1})$ $n \neq -1$;

$$W = K\, \text{Ln}\, \frac{r_1}{r_0} \qquad \text{para} \quad n = 1$$

b) Para todo valor finito de n,k, salvo K = 0 que sería campo nulo.

$$U(x,y,z) = \frac{K}{n+1}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{k}{n+1}\, r^{n+1} \qquad \text{para } n \neq -1$$

$$U(x,y,z) = K\, \text{Ln}\, (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = K\, \text{Ln}\, r \qquad \text{para } n = -1$$

LECCIÓN. 19

INTEGRALES PARAMÉTRICAS.

LLamamos integral paramétrica a toda integral en intervalo finito o infinito de una $f(x, t_1 \dots t_n)$ que además de depender de la variable de integración "x", depende de uno o varios parámetros $t_1 \dots t_n$.

$$\int_a^b f(x, t_1, \dots, t_n)dx = F(t_1, t_2 \dots t_n)$$

Propiedades:

Si $f(x,t)$ es continua en $R\left\{(x,t) \,/\, a \leq x \leq b\ ,\ c \leq t \leq d\right\}$

la $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\, dx = F(t)$ es continua en $t \in |c,d|$

En este supuesto de continuidad se podría integral $F(t)$ respecto de "t":

$$\int_c^d F(t) = \int_c^d \left(\int_a^b (f(x,t)dx) \right)dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx$$

y podemos derivar si $f(x,t)$ admite derivada parcial respecto a "t":

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

> *1.- Calcular:*
>
> $$\int_0^{\infty} \frac{sen\ x}{x}\,dx, \text{ a partir de } \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ \frac{sen\ x}{x}\,dx$$

Solución:

Sea:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ \frac{\text{sen } x}{x}\,dx$$

Derivando respecto de "λ":

$$F'(\lambda) = \int_0^{\infty} -xe^{-\lambda x}\ \frac{\text{sen } x}{x}\,dx = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ \text{senx}\,dx$$

Integrando por partes:

$$F'(\lambda) = -\left(\frac{-e^{-\lambda x}}{1+\lambda^2}(\cos x + \lambda \text{sen } x)\right)_0^{\infty} = -\frac{1}{1+\lambda^2}$$

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}$$

Integrando respecto de λ :

$$F(\lambda) = -\int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} + k$$

$$F(\lambda) = -\text{arc tg } \lambda + k$$

Calculemos ahora el valor de k.

Tomando valores para $\lambda \longrightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ \frac{\text{sen } x}{x}\,dx = \int_0^{\infty} 0\,dx = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} (k - \text{arc tg } \lambda)$$

$$K = \lim_{\lambda \to \infty} \text{arc tg } \lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$F(\lambda) = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \lambda\right)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\text{sen } x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \lambda$$

Tomando ahora $\lambda = 0$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

> *2.- Calcular:*
>
> $$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \text{ sen } x \, dx$$
>
> *a partir de:*
>
> $$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \text{ sen } x \, dx$$

Solución:

Sea:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \text{ sen } x \, dx$$

Integrando por partes:

$$F(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \text{ sen} x \, dx = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Derivando esta igualdad "n" veces respecto de λ , tenemos:

$$F'(\lambda) = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, x \text{ sen } x \, dx$$

$$F''(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, x^2 \text{ sen } x \, dx \ldots$$

$$F^{n}(\lambda) = \int_0^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda x} x^n \operatorname{sen} x \, dx$$

Tomando valores para $\lambda = 1$:

$$F^{n}(\lambda)\Big|_{\lambda = 1} = \int_0^{\infty} (-1)^n e^{-x} x^n \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = (-1)^n F^{(n)}(\lambda)_{= 1}$$

siendo:

$$F(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

3.- Calcular:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{Ln(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \, dx$$

a partir de:

$$\int_0^{\pi} \frac{Ln\,(1 + a \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \, dx$$

Solución:

Sea:

$$F(a) = \int_0^{\pi} \frac{Ln\ (1 + a \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \, dx$$

Derivando respecto de "a":

$$F'(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + a \operatorname{sen} x} \, dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a \operatorname{sen} x}$$

Haciendo el cambio:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{2\, dt}{t^2 + 2at + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arcsen} a$$

Integrando respecto a "a":

$$F(a) = \int \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \text{ arc sen } a\right) da + k = \pi \text{arcsen } a - (\text{arc sen} a)^2 + k$$

Calculamos k, dando a "a" el valor de a = 0:

$$F(0) = \int_0^{\pi} \frac{\text{Ln } 1}{\text{sen } x}\, dx = \int_0^{\pi} 0\, dx = 0$$

$$F(0) = 0 = \pi \text{ arc sen } 0 - (\text{arc sen } 0)^2 + k$$

$$k = 0$$

$$F(a) = \pi \text{ arc sen } a - (\text{arc sen } a)^2$$

Tomando a = 1, F(1) = I:

$$I = \pi \text{ arc sen } 1 - (\text{arc sen } 1)^2 =$$

$$= \pi \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

4.- Demostrar que:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Solución:

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)^2 dx = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^2}\, dx$$

Sea $x = \lambda t$:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2\lambda t}{2\lambda^2 t^2}\, \lambda\, dt$$

Tomamos:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2\lambda t}{2\lambda t^2}\, dt$$

Con F(1) = I

Derivamos $F(\lambda)$:

$$F'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{2t\lambda \operatorname{sen} 2\lambda t - 1 + \cos 2\lambda t}{2t^2\lambda^2}\, dt$$

$$F'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2\lambda t}{\lambda t}\, dt - \int_0^\infty \frac{1-\cos 2\lambda t}{2\lambda^2 t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2\lambda t}{2\lambda t}\, d(2\lambda t) - \frac{1}{\lambda} F(\lambda)$$

$$F'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz - \frac{1}{\lambda} F(\lambda)$$

Según el ejercicio nº 1:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$F'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\lambda} F(\lambda)$$

Ecuación diferencial de $1^{\underline{er}}$ orden lineal, cuya solución (ver ecuaciones diferenciales).

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(k + \frac{\pi}{2}\lambda\right)$$

Para $\lambda = 0$

$$F(0) = \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \frac{1-\cos 2\lambda t}{2\lambda t^2}\, dt = \int_0^\infty \lim_{\lambda\to 0} \frac{2t \operatorname{sen} 2\lambda t}{2t^2}\, dt =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2\lambda t}{2\lambda t}\, d(2\lambda t) = \frac{\pi}{2}$$

$$F(0) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad k = 0$$

Así pues: $$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{2} \lambda = \frac{\pi}{2}$$

para todo :

Luego: $$I = F(\lambda)\Big|_{\lambda = 1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{. c.s.q.d.}$$

5.- Calcular:

$$\int_0^{\infty} Ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx;\quad a\ partir\ de\quad \int_0^{\infty} Ln(1+\frac{\lambda^2}{x^2})\,dx$$

Solución:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} Ln(1+\frac{\lambda^2}{x^2})\,dx \quad \text{con} \quad F(\lambda)_{\lambda=1} = I$$

Derivando respecto de :

$$F'(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{2\lambda}{x^2}}{1+\frac{\lambda^2}{x^2}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2\lambda}{x^2+\lambda^2}\,dx$$

$$F'(\lambda) = 2\ \text{arc tg}\ \frac{x}{\lambda}\Big]_0^{\infty} = 2(\frac{\pi}{2}-0) = \pi$$

Integrando respecto de λ:

$$F(\lambda) = \pi\int d\lambda + k = k + \lambda\pi.$$

Tomando valores para $\lambda = 0$:

$$F(0) = \int_0^{\infty} Ln\ (1+0)\,dx = 0$$

$$F(0) = 0 = k + 0 \qquad k = 0$$

$$F(\lambda) = 1$$

Para $\lambda = 1$:

$$F(1) = \pi = I$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

6.- Demostrar a partir de:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx \quad \text{que} \quad \int_0^{\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

Solución:

Calcular:

$$F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx$$

y derivar respecto de "a".

7.- Calcular:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos\theta)^3}$$

sin encontrar una primitiva.

Solución:

Partir de:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\lambda + \cos\theta} = F(\lambda)$$

Por derivación:

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

8.- Demostrar que para $y > -1$ es posible de:

$$\frac{1}{1+y} = \int_0^1 x^y dx$$

deducir que:

$$\frac{1}{(1+y)^2} = -\int_0^1 x^y \operatorname{Ln} x\, dx$$

Solución:

Dividir el intervalo $y > -1$ en $y > 0$, $-1 < y < 0$ y estudiar la continuidad y convergencia de la función:

$$\int_0^1 x^y \, dx$$

9.- A partir de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \lambda^2}$$

Calcular el valor de la integral:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^n}$$

Solución:

Calcular:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \lambda^2}$$

Derivando "n" veces respecto a λ.

$$I = \frac{\pi}{2} \, \frac{(2n - 3)!!}{(2n - 2)!!} \, \frac{1}{\lambda^{2n - 1}}$$

10.- Calcular:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \lambda x \, dx$$

Solución:

Partir de: $F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \lambda x \, dx$

Por derivación se obtiene una ecuación en $F'(\lambda)$; $F(\lambda)$. Resolviéndola:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, e^{-1/4}$$

LECCIÓN. 20

INTEGRALES MÚLTIPLES.

Integrales dobles:

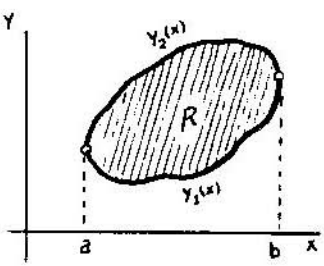
Sea f(x,y) una función continua en un recinto plano R y en su frontera.

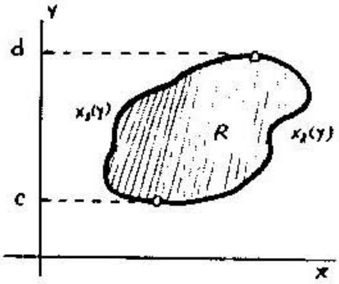
Se define:

$$\iint_R f(x,y)dx\ dy = \lim_{\Delta\omega_i \to 0} \sum_R f(x_i,y_i)\ \Delta\omega i$$

Con $\Sigma\Delta\omega_i = \Omega_R$, siendo Ω_R el área del recinto R.

Cálculo:





$$\iint_R f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dy$$

Haciendo referencia a la figura 1ª ó bien a la figura 2ª:

$$\iint_R f(x,y)\ dx\ dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ dx$$

Cambio de variables:

Sea $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$ las ecuaciones del cambio de variables:

$$dx\ dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\ dv. \quad \text{donde} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

es el jacobiano de las x,y, respecto a las (u,v)

En el cambio a polares:

$$dx\ dy = \rho\, d\rho\, d\theta$$

Interpretación geómetrica:

$$\iint_R f(x,y)\ dx\ dy$$

representa el volumen encerrado por la superficie $z = f(x,y)$ y un cilindro recto de base R, en el plano xy.

Integrales Triples:

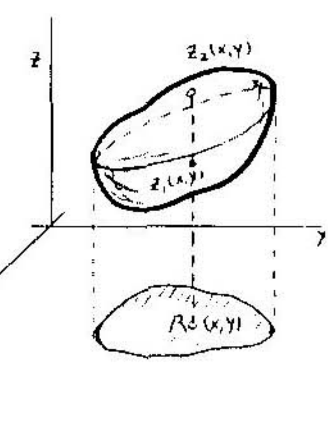
Sea $f(x,y,z)$ una función continua en un recinto "V" y en su superficie frontera. Se define:

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \lim_{\Delta v_i \to 0} \sum_i f(x_i, y_j, z_k)\ \Delta v_i$$

con:

$$\Delta v_i = V$$

donde "V" es el volumen del recinto V.



Cálculo de las integrales triples.

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_R dx\, dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

Esta fórmula es rotativa en relación a las tres variables.

Cambio de variables:

Sean

$$x = x(u,v,w)$$

$$y = y(u,v,w)$$

$$z = z(u,v,w)$$

Las ecuaciones del cambio de variables:

$$dx\, dy\, dz = \frac{J(x,y,z)}{J(u,v,w)}\, du\, dv\, dw.$$

Cálculo de superficies:

Sea σ una superficie y R_{xy}, R_{yz}, R_{xz}, sus proyecciones sobre los planos coordenados correspondientes:

$$\Omega = \iint_{R_{xy}} \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint_{R_{yz}} \frac{dydz}{\cos\alpha} = \iint_{R_{xz}} \frac{dxdz}{\cos\beta}$$

donde:

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta\ ,\ \cos\gamma\ )$$

son los cosenos directores de la normal a la superficie en cada punto.

Si la superficie tiene de ecuación $F(x,y,z) = 0$, se cumple:

$$\frac{\cos\alpha}{F'_x} = \frac{\cos\beta}{F'_y} = \frac{\cos\gamma}{F'_z} = \frac{1}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

si la superficie viene dada por:

$$z = z(x,y)$$

$$\frac{\cos\alpha}{Z'_x} = \frac{\cos\beta}{Z'_y} = \frac{\cos\gamma}{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (Z'_x)^2 + (Z'_y)^2}}$$

En el caso particular de cos γ :

$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (Z'_x)^2 + (Z'_y)^2}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Calcular:

$$\iint_R \frac{xy\ dx\ dy}{1 + x^2 + y^2}$$

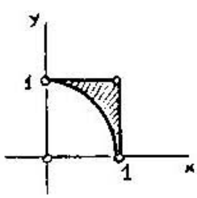
siendo R, el recinto limitado por:

$$x^2 + y^2 \geq 1 \quad ; \quad x \leq 1 \quad ; \quad y \leq 1$$

Solución:

Integramos primero respecto a x, y constante. Los límites de "x" son:

$$x \Big]_{\sqrt{1-y^2}}^{1} \qquad\qquad y \Big]_0^1$$



$$I = \int_0^1 y\ dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{1} \frac{x\ dx}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 y\ dy\ \left[\mathrm{Ln}\ (1+x^2+y^2)\right]_{\sqrt{1-y^2}}^{1}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 y\left[\mathrm{Ln}(2+y^2) - \mathrm{Ln}2\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\ \mathrm{Ln}\ \left(\frac{2+y^2}{2}\right) dy$$

Haciendo el cambio:

$$\frac{2+y^2}{2} = e^u$$

$$I = \frac{3}{4}\ \mathrm{Ln}\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$$

2.- Calcular:

$$\iint_R e^{-x-y}(x+y)^n \, dxdy$$

siendo R el recinto $x \geq 0$; $y \geq 0$. $n \in Z$.

Solución:

$$I = \iint_R e^{-x-y}(x+y)^n \, dx \, dy = \iint_R e^{-x-y} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p \right) dx \, dy$$

$$I = \sum_{p=0}^{n} \iint_R e^{-x-y} x^{n-p} y^p \, dx \, dy = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \int_0^\infty e^{-y} y^p \, dy \int_0^\infty e^{-x} x^{n-p} \, dx$$

$$I = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Gamma(p+1)\,\Gamma(n-p+1) = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} p!(n-p)! = \sum_{p=0}^{n} (n!) =$$

$$= (n+1)n!$$

$$I = (n+1)!$$

3.- Calcular:

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

extendida al primer cuadrante del plano xy.

Solución:

Pasando a polares:

$$I = \iint_R e^{-\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \rho \, e^{-\rho^2} \, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{-\rho^2}}{-2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

4.- Calcular:

$$I = \iint e^{-(x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2)}\, dx\, dy$$

extendida al primer cuadrante.

Solución:

Pasando a coordenada polares:

$$I = \iint_R e^{-\rho^2(1+\cos\alpha \,\mathrm{sen}\, 2\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2(1+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,2\theta)} d\rho$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{e^{-\rho^2(1+\cos\alpha\,\mathrm{sen}2\theta)}}{-2(1+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,2\theta)}\right]_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\alpha\,\mathrm{sen}2\theta}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta/\cos^2\theta}{1 + \mathrm{tg}^2\theta + 2\,\mathrm{tg}\,\theta\cos\alpha}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta/\cos^2\theta}{(\mathrm{tg}\,\theta + \cos\alpha)^2 + \mathrm{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}\int_0^{\pi/2} \frac{\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}\,\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}}{1+\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{sen}\,\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}\right)^2}$$

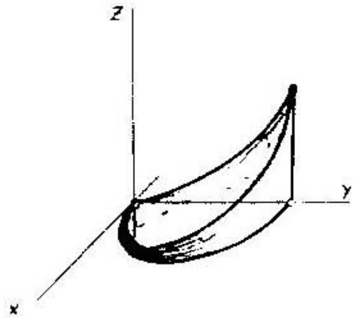
$$I = \frac{1}{2\mathrm{sen}\,\alpha}\left(\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\theta + \cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\mathrm{sen}\,\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \frac{\alpha}{2\mathrm{sen}\alpha}$$

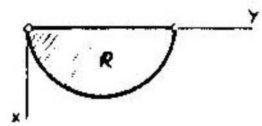
5.- Volumen comprendido entre el cilindro:

$$x^2 + y^2 = 2y$$

el cilindro $z = y^2$ *y el plano xy.*

Solución:





$$V = 2 \iint_R z \, dx \, dy = 2 \iint_R y^2 \, dx \, dy$$

Pasando a polares:

$$x^2 + y^2 = 2y \qquad \rho = 2 \operatorname{sen}\theta$$

$$V = 2 \iint_R \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \, \rho \, d\rho \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho^3 \, d\rho$$

$$V = \frac{2}{4} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta \, 2^4 \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta = \frac{2^5}{4} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6\theta \, d\theta$$

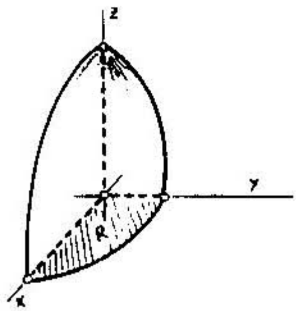
$$V = \frac{2^5}{8} \beta\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4 \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{8}{2}\right)} = \frac{5}{4} \pi$$

6.- Calcular el volumen del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución:

Tomando como referencia la figura, donde se ha representado solo el primer octante:



$$V = 8 \iint_R z\ dx\ dy \qquad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$V = 8c \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\ dx\ dy$$

Hacemos el cambio:

$$x = a\rho\cos\theta$$

$$y = b\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \frac{J(x,y)}{J(\rho,\theta)} = ab\rho$$

$$R \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pasa a ser:

$$\rho^2 = 1$$

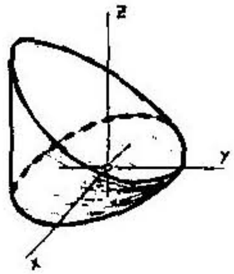
$$V = 8c \iint_R (1-\rho^2)^{1/2}\ ab\rho\, d\rho\, d\theta = 8abc \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)^{1/2}\rho\ d\rho$$

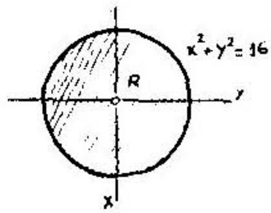
$$V = 8abc\ \frac{\pi}{2}\ \left[\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{-3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc$$

7.- Volumen limitado por:

$$z = 0; \quad 2y + 2z - x = 8\ ; \ x^2 + y^2 = 16$$

Solución:





Tomando R en el plano xy.

$$V = \iint_R z \; dx \; dy \quad \text{donde} \quad R \qquad x^2 + y^2 \leq 16$$

$$V = \iint_R \frac{8 + x - 2y}{2} \; dx \; dy = \iint_R \left(4 + \frac{2}{x} - y\right) dx \; dy$$

Pasando a polares:

$$V = \iint_R \left(4 + \frac{1}{2} \rho \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta\right) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \left(4\rho + \rho^2\left(\frac{1}{2} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)\right) \; d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[2\rho^2 + \frac{\rho^3}{3}\left(\frac{1}{2} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)\right]_0^4$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \left(32 + \frac{64}{3}\left(\frac{1}{2} \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right)\right) =$$

$$= \left[32\,\theta + \frac{64}{3}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta + \cos\theta\right)\right]_0^{2\pi} = 64\,\pi$$

8.- Volumen limitado por el paraboloide:

$$2p\,z = x^2 + y^2$$

y el plano $x + y = z$.

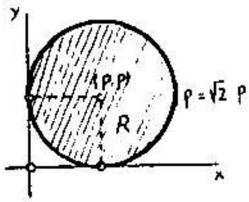
Solución:

La intersección de las dos superficies proyectada sobre el xy, será:

$x + y = z \qquad x^2 + y^2 = 2p(x+y) = (x-p)^2 + (y-p)^2 = (\sqrt{2}.p)^2$

$x^2 + y^2 = 2p\,z \qquad$ circunferencia de centro (p,p) y radio $\sqrt{2}.p$

El volumen pedido será la diferencia entre el volumen encerrado por el plano y el cilindro de base la circunferencia anterior y el volumen - encerrado por el paraboloide y el mismo cilindro anterior.



$$V = \iint_R (x + y)\,dx\,dy - \iint_R \frac{x^2 + y^2}{2p}\,dx\,dy$$

$$V = \iint_R \left(x + y - \frac{x^2 + y^2}{2p}\right) dx\,dy$$

Hacemos el cambio:

$$x = p + \rho\cos\theta \qquad y = p + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{J(x,y)}{J(\rho,\theta)} = \rho$$

$$V = \iint_R (2p + \rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{(p+\rho\cos\theta)^2 + (p+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}{2p}) \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$V = \iint_R (p - \frac{\rho}{p}) \rho\, d\rho\, d\theta = \iint_R (p\rho - \frac{\rho^2}{p})\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{p\sqrt{2}} (p\rho - \frac{\rho^2}{p})\, d\rho$$

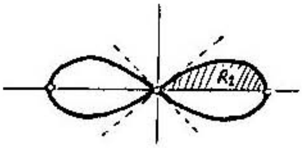
$$V = 2\pi[p\frac{\rho^2}{2} - \frac{1}{3p}\rho^3]_0^{p\sqrt{2}} = 2\pi[p^2\frac{p^2}{2} - \frac{1}{3p}\rho^3\, 2\sqrt{2}] =$$

$$= 2\pi\,[p^3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\,p^2]$$

9.- Hallar el momento de inercia respecto al eje polar del area encerrada por la lemniscata:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta\ .$$

Solución:



$$I_x = \iint_R y^2\, dx\, dy$$

Por definición de momento de inercia.

Pasando a coordenadas polares:

$$I_x = \iint_R \rho^2\mathrm{sen}^2\theta\ \rho\, d\rho\, d\theta = 4\iint_{R_1} \rho^3\mathrm{sen}^2\theta\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}^2\theta\ d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho^3\, d\rho$$

$$I_x = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\theta \; a^4 \; (2 \cos 2\theta)^2 \, d\theta = 4a^4 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2\theta \, (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 \, d\theta$$

$$I_x = 4a^4 \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen}^2\theta \cos^4\theta - 2\operatorname{sen}^4\theta \cos^2\theta + \operatorname{sen}^6\theta) \, d\theta$$

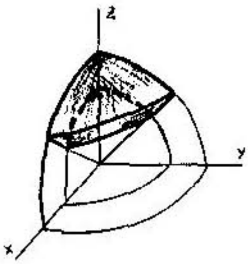
Integrando:

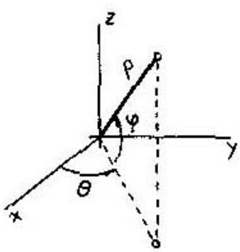
$$I_x = a^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

10.- Volumen comprendido en el primer octante entre:

$$z^2 = x^2 + y^2 \; ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

Solución:





Tomando coordenadas esféricas:

$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta$$

$$y = \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \qquad \left|\frac{J(x,y,z)}{J(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2 \cos\varphi$$

$$z = \rho \operatorname{sen}\varphi$$

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz = \iiint_V \rho^2 \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Las ecuaciones de las tres superficies es:

Cono: $\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi = \rho^2\cos^2\varphi \qquad \operatorname{sen}\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{4}\ ;\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Esferas: $\rho = 1 \qquad \rho = 4$

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi\ d\varphi \int_1^4 \rho^2\ d\rho = 2.2\pi\left[\operatorname{sen}\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^4$$

$$V = 4\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\frac{63}{3} = 84\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\cdot 2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2} = 4\cdot 2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

11.- Demostrar que:

$$\iiint_V x^{p-1}\, y^{q-1}\, z^{r-1}\, dx\, dy\, dz$$

extendida al octante positivo del volumen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} \leq 1$$

tiene como valor:

$$I = \frac{a^p\, b^q\, c^r}{\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma}\ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\,\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\,\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1\right)}$$

(Fórmula de Dirichlet).

Aplicar la fórmula para calcular el momento de inercia respecto de los planos coordenados del elipsoide:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

<u>Solución:</u>

$$I = \int_0^a x^{p-1}\, dx \int_0^{b\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\right)^{1/\beta}} y^{q-1}\, dy \int_0^{c\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}-\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}\right)^{1/\gamma}} z^{r-1}\, dz$$

En la integral en z, hacemos:

$$z = ct^{\frac{1}{\gamma}} (1 - (\frac{x}{a})^{\alpha} - (\frac{y}{b})^{\beta})^{1/\gamma}$$

$$I = \frac{c^r}{\gamma} \int_0^a x^{p-1}\, dx \int_0^{b(1-(\frac{x}{a})^{\alpha})^{1/\beta}} y^{q-1} [1-(\frac{x}{a})^{\alpha}-(\frac{y}{b})^{\beta}]^{r/\gamma}\, dy \int_0^1 t^{\frac{r}{\gamma}-1} (1-t)^{1-1}\, dt$$

$$I = \frac{c^r}{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{r}{\gamma})\,\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)} \int_0^a x^{p-1}\, dx \int_0^{b(1-(\frac{x}{a})^{\alpha})^{1/\beta}} y^{q-1} (1-(\frac{x}{a})^{\alpha}-(\frac{y}{b})^{\beta})^{r/\gamma}\, dy$$

Haciendo en "y" el cambio : $y = bt^{1/\beta} (1-(\frac{x}{a})^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}}$

$$I = \frac{c^r}{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{r}{\gamma})\,\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)} \frac{b^q}{\beta} \frac{\Gamma(\frac{q}{\beta})\,\Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)}{\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)} \int_0^a x^{p-1} (1-(\frac{x}{a})^{\alpha})^{\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}\, dx$$

Haciendo en esta última integral:

$$x = a\, t^{1/\alpha}$$

resulta una euleriana:

$$I = \frac{c^r}{\gamma} \frac{b^q}{\beta} \frac{a^p}{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{r}{\gamma})\,\Gamma(1)\,\Gamma(\frac{q}{\beta})\,\Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)\,\Gamma(\frac{p}{\alpha})\,\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)}{\Gamma(\frac{r}{\gamma}+1)\,\Gamma(\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1)\,\Gamma(\frac{r}{\gamma}+\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}+1)}$$

Despues de simplificar queda la fórmula propuesta.

Para los momentos de inercia propuestos:

$$I_{xy} = \iiint_V z^2\, dx\, dy\, dz = 8 \iiint_{V_1} z^2\, dx\, dy\, dz$$, con V_1 el 1^{er} octante

del elipsoide. Aplicando la fórmula con $p = 1$, $q = 1$, $r = 3$, $\alpha = \beta = \gamma = 2$

$$I_{xy} = 8 \frac{abc^3}{2.2.2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+1)} = \frac{4\pi a\, b\, c^3}{15}$$

Igualmente para los otros dos planos:

$$I_{xz} = \frac{4\pi ab^3 c}{15}$$

$$I_{yz} = \frac{4\pi a^3 bc}{15}$$

12.- Calcular el área de la esfera:

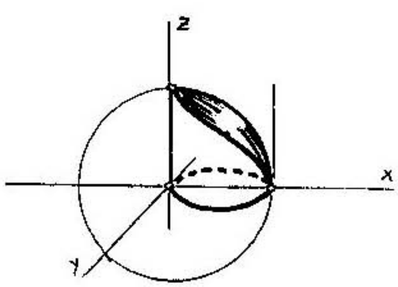
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

con $z \geq 0$, interior al cilindro:

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

(Bóveda de Viviani).

Solución:



$$\Omega = \iint_\sigma d\sigma$$

Proyectando sobre el xy:

$$\Omega = 2 \iint_R \frac{dx\ dy}{\cos \gamma}$$

Haciendo referencia a la figura.(Sólo el 1er octante).

Calculando $\cos \gamma$ sobre la esfera:

$$\frac{\cos \alpha}{2x} = \frac{\cos \beta}{2y} = \frac{\cos \gamma}{2z} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2a}$$

$$\cos \gamma = \frac{2z}{2a} = \frac{1}{a} z = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\Omega = 2\iint_R \frac{dx\ dy}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a\iint_R \frac{dx\ dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Pasando a polares:

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \qquad \rho = a\cos\theta$$

$$\Omega = 2a\iint_R \frac{\rho d\rho\ d\theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2a\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} =$$

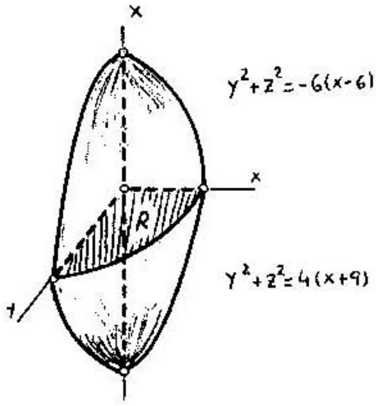
$$= 2a\int_0^{\pi/2} d\theta\, \left(-(a^2 - \rho^2)^{1/2}\right)_0^{a\cos\theta}$$

$$\Omega = 2a\int_0^{\pi/2} (a - a\operatorname{sen}\theta)d\theta = 2a^2\left[\theta + \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = a^2(\pi - 2)$$

13.- Determinar el área del sólido limitado por los paraboloides

$$(y^2 + z^2) = 4(x + 9) \qquad y^2 + z^2 = -6(x - 6)$$

Solución:



Ambos paraboloides se cortan sobre el plano:

$$4(x + 9) = -6(x - 6) \qquad 10x = 0 \longrightarrow x = 0$$

La circunferencia común es:

$$y^2 + z^2 = 36 \qquad R. \qquad \rho = 6$$

Proyectando sobre el zy:

$$\Omega = \left| \iint_R \frac{dy\ dz}{\cos\ \alpha_1} \right| + \left| \iint_R \frac{dy\ dz}{\cos\ \alpha_2} \right| \quad .$$

Para el paraboloide 1º:

$$y^2 + z^2 = + 4(\ x + 9) \qquad y^2 + z^2 - 4x - 36 = 0$$

$$\frac{\cos\ \alpha_1}{-4} = \frac{\cos\ \beta_1}{2y} = \frac{\cos\ \gamma_1}{2z} = \frac{1}{\sqrt{4y^2 + 4z^2 + 16}}$$

$$\cos\ \alpha_1 = \frac{-\ 4}{2\sqrt{4 + y^2 + z^2}}$$

Para el paraboloide 2º:

$$y^2 + z^2 = -6(x -6) \qquad y^2 + z^2 + 6x - 36 = 0$$

$$\cos\ \alpha_2 = \frac{3}{\sqrt{9 + y^2 + z^2}}$$

$$\Omega = \iint_R \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2}}{2}\ dy\ dz + \iint_R \frac{\sqrt{9 + y^2 + z^2}}{3}\ dy\ dz$$

Pasando a polares:

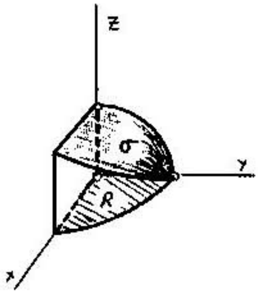
$$\Omega = \iint_R \frac{\sqrt{4 + \rho^2}}{2}\ \rho d\rho\ d\theta + \iint_R \frac{\sqrt{9 + \rho^2}}{3}\ \rho\, d\rho\ d\theta$$

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^6 \frac{\sqrt{4 + \rho^2}}{2}\ \rho\, d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^6 \frac{\sqrt{9 + \rho^2}}{3}\ \rho\, d\rho$$

$$\Omega = \frac{\pi}{3}\ (40\sqrt{40} - 8) + \frac{2\pi}{9}\ (45\sqrt{45} - 27)$$

14.- Dos cilindros rectos circulares de igual radio se cortan ortogonalmente. Calcular el area del sólido de la intersección.

Solución:



Sean los cilindros:

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad\qquad y^2 + z^2 = a^2$$

Como la intersección es simétrica, el sólido estará formado por 16 superficies iguales a " σ " y que en la figura se proyecta sobre "R" :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Omega = 16 \iint_R \frac{dx\ dy}{\cos \gamma}$$

$$y^2 + z^2 = a^2$$

$$\frac{\cos \alpha}{0} = \frac{\cos \beta}{2y} = \frac{\cos \gamma}{2z} = \frac{1}{2a}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\Omega = 16 \iint_R \frac{dx\ dy}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - y^2}} = 16a \iint_R \frac{dx\ dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} =$$

$$= 16a \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx = 16a \int_0^a dy$$

$$\Omega = 16a^2$$

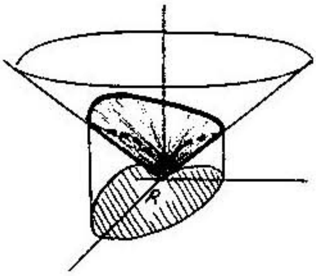
15.- Área de la porción de área de cono:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

interior al cilindro recto de eje OZ, y directriz:

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

Solución:



$$\Omega = \iint_R \frac{dx\ dy}{\cos\gamma}$$

Calculemos $\cos\gamma$:

$$\frac{\cos\alpha}{2x} = \frac{\cos\beta}{2y} = \frac{\cos\gamma}{-2z} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,z}$$

$$|\cos \gamma| = \frac{2z}{2\sqrt{2}\,z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Omega = \iint_R \frac{dx\ dy}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\iint_R dx\ dy$$

Pasando a polares:

$$\Omega = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\,\left(a^2(1+\cos\theta)^2\right) = 8a^2\sqrt{2}$$

16.- Hallar el área del sólido formado por el paraboloide:

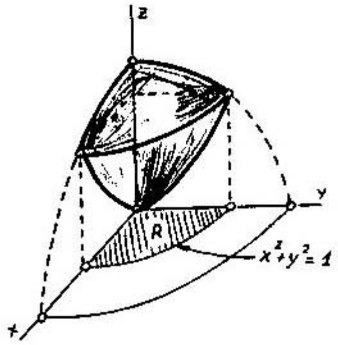
$$z = x^2 + y^2$$

y la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

interior al paraboloide.

<u>Solución:</u>



El área formada es cuatro veces la dibujada que se proyecta en "R".

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \qquad z = x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$z^2 + z = 2 \Rightarrow z = 1$$

$$R : x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad \Omega = \Omega_p + \Omega_e$$

Ω_p . Area del paraboloide: $x^2 + y^2 - z = 0$

$$\Omega_p = 4 \iint_R \frac{dx\,dy}{\cos \gamma_p} \quad ; \quad \frac{\cos \alpha_p}{2x} = \frac{\cos \beta_p}{2y} = \frac{\cos \gamma_p}{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} .$$

$$(\cos \gamma_p) = \frac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$$

$$\Omega_p = 4 \iint_R \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\ dx\,dy$$

Pasando a polares:

$$\Omega_p = 4 \iint_R \sqrt{1+4\rho^2}\ \rho\,d\rho\,d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho \sqrt{1+4\rho^2}\ d\rho =$$

$$= 4\ \frac{\pi}{2}\ \frac{(1+4\ \rho^2)^{3/2}}{12} \Bigg|_0^1$$

$$\Omega_p = \frac{\pi}{12}\ (5^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5} - 1)$$

$$\Omega_e = 4 \iint_R \frac{dx\,dy}{\cos \gamma_e}$$

Ω_e: Área de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$\frac{\cos \alpha_e}{2x} = \frac{\cos \beta_e}{2y} = \frac{\cos \gamma_e}{2z} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

$$\Omega_e = 4 \iint \sqrt{2}\ \frac{dx\,dy}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}} = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}$$

$$\Omega_e = 4\sqrt{2}\ (\sqrt{2} - 1)\ \frac{\pi}{2} = (8 - 4\sqrt{2})\ \frac{\pi}{2}$$

$$\Omega = \Omega_p + \Omega_e = \frac{\pi}{12}\ (5\sqrt{5} - 1) + (4 - 2\sqrt{2})\pi$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

17.- Calcular:

$$\iint_R x^2 y^2 \, dx \, dy$$

siendo "R" el recinto acotada por las hipérbolas:

$$xy = 1 \quad ; \quad xy = 2$$

las rectas $y = x$; $y = 4x$, en el 1er cuadrante.

Solución:

$$I = \frac{7}{6} \operatorname{Ln} 4$$

18.- Volumen encerrado por el cilindro recto:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \quad \text{y la superficie } (az = xy)$$

Solución:

$$V = \frac{a^3}{6}$$

19.- Volumen comprendido por la superficies:

$$z = xy \; ; \; z = 0 \; ; \; x^2 + y^2 = 1 \; ; \; (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Solución:

$$V = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \quad \text{(En cartesianas)}$$

20.- Calcular el volumen en el primer octante, encerrado por la superfi - cie:

$$z = x^2 + y^2$$

y el plano:

$$x + y = 1$$

Solución:

$$V = \frac{1}{6} \qquad \text{(En cartesianas)}$$

21.- Volumen limitado por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

y el cilindro:

$$x^2 + y^2 = ax$$

Solución:

$$V = \frac{4\ a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{(En Polares)}$$

22.- Volumen comprendido entre el cono:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

y el paraboloide:

$$z = x^2 + y^2$$

Solución:

$$\frac{\pi}{6} \qquad \text{(En Polares)}$$

23.- Hallar el volumen limitado por el paraboloide:

$$z = x^2 + y^2$$

el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 0$; $z = 2$.

Solución:

$$8\ \pi + \frac{386}{75} \qquad \text{(En cartesianas)}$$

24.- Hallar el centro de gravedad y el momento de inercia respecto al eje Oy, del área limitada por la parábola $x = y^2$ y la rectas $x = 1$; $y = 0$.

Solución:

$$C \text{ de } G \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{8}\right) \qquad I_y = \frac{2}{7}$$

25.- Calcular la masa de una esfera de radio a,cuya densidad en cada punto es proporcional al cubo de su distancia al centro.

Solución:

$$\frac{k \pi a^6}{3} \qquad \text{Esféricas}$$

Siendo k, el factor de proporcionalidad.

26.- Calcular el centro de gravedad del volumen encerrado por el paraboloide:

$$z = x^2 + y^2$$

y el plano:

$$z = 1$$

Solución:

$$Z_g = \frac{2}{3} \qquad \text{Cilíndricas.}$$

27.- Calcular el momento de inercia respecto a uno de los planos diagonales del paralelepipedo limitado por los planos:

$$x = 0 \ ; \ x = a \ ; \ y = 0 \ ; \ y = b \ ; \ z = 0 \ ; \ z = c$$

Solución:

$$I = \frac{c\, b^3\, a^3}{6(a^2 + b^2)} \qquad \text{(En cartesianas)}$$

Para esta solución se ha tomado como plano diagonal el:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

28.- Área de xy = az, interior al cilindro:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\, xy$$

Solución:

$$\Omega = \frac{2a^2}{3}\left(\frac{10}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(En Polares)}$$

29.- Área del cono $z^2 = x^2 + y^2$, interior al cilindro:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Solución:

$$\Omega = 2\sqrt{2}\,\pi$$

30.- Área de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

exterior al paraboloide:

$$x^2 + y^2 + z = 16$$

Solución:

$$\Omega = 8\pi \qquad \text{(En Polares)}$$

El recinto de integración esta formado por la corona circular de radios $\sqrt{15}$, 4

LECCIÓN 21

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

Llamamos ecuación diferencial de primer orden, a una ecuación del tipo:

$$F(x,y,y') = 0$$

Llamamos solución de la ecuación diferencial:

$$F(x,y,y') = 0$$

al haz de curvas dependientes de un parámetro:

$$f(x,y,C) = 0$$

que tiene a:

$$F(x,y,y') = 0$$

como su ecuación diferencial.

<u>Tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden:</u>

a) Variables separadas: $P(x)\,dx = Q(y)\,dy$

solución : $\int P(x)\,dx + C = \int Q(y)\,dy$

b) Lineal: $y' + P(x)\,y = Q(x)$

solución:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

c) Homogénea: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

con: $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Homogénea de grado cero.

solución: Se efectúa el cambio $y = ux$ $\quad y' = u'x + u$, convirtiéndose en una lineal.

d) Reducibles a homogéneas: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c}$

Solución: Si el sistema primero $ax + by + c_1 = 0$; $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ tiene una sola solución (h,k).

Hacemos el cambio:

$$x = X + h \qquad y = Y + k$$

con:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

convirtiendo la ecuación en homogénea.

Si el sistema primero no tiene solución, entonces se cumple que:

$$\lambda = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

escribiéndose el sistema como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

Haciendo el cambio $a_1x + b_1y = u$ la ecuación se convierte en variable separadas

e) Ecuaciones diferenciales exactas:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

con la condición:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Solución: Encontrar una función $U(x,y) = C$ con $U'_x = P(x,y)$, $U'_y = Q(x,y)$

f) Factor Integrante:

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0$$

con:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Solución: Encontrar una función $\mu = \mu(x,y)$, llamada factor integrante que la convierta en diferencial exacta.

$$\mu P(x,y)\,dx + \mu Q(x,y)\,dy = 0$$

con:

$$\frac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial x}$$

g) Ecuación de Bernouilli:

$$y' + y\,P(x) = Q(x)\,y^n$$

Solución: Dividiendo por y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}}\,P(x) = Q(x)$$

Hacemos el cambio:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \qquad z' = \frac{1-n}{y^n}\,y'$$

se convierte en lineal.

h) Ecuación de Riccati:

$$y' + P(x)\,y^2 + Q(x)y = R(x)$$

1ª Solución: Conociendo una solución particular y_p, hacemos el cambio:

$$y = y_p + z$$

que la convierte en una de los tipos anteriores.

2ª Solución: Conociendo dos soluciones particulares, y_1, y_2, el cambio:

$$z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

la convierte en una de variables separadas de la forma:

$$\frac{dz}{z} = P(x)\,(y_2 - y_1)\,dx$$

i) Ecuaciones de la forma:

$$y = f(y')$$

Solución:

$$y' = p \qquad y = f(P)$$

Derivando:

$$P = f'(P)\,\frac{dp}{dx}$$

$$dx = \frac{f'(p)}{p}\,dp \qquad \left.\begin{aligned} x + C &= \int \frac{f(p)}{p}\,dp \\ y &= f(p) \end{aligned}\right\} \text{Solución en paramétricas}$$

j)Ecuaciones de la forma:

$$x = f(y')$$

Solución:

$$y' = p \qquad x = f(p)$$

Derivando respecto de x, con:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p$$

tenemos:

$$1 = f'(p)\,.p\,\frac{dp}{dy}$$

$$C + \int dy = \int p\,f'(p)\,dp$$

$$\left.\begin{aligned} y + C &= \int p\,f'(p)\,dp \\ x &= f(p) \end{aligned}\right\} \text{Solución paramétrica.}$$

k) Ecuación de Lagrange:

$$y = x\, f(y') + g(y')$$

con:

$$f(y') \neq y'$$

Solución:

$$y' = p \qquad y = x\, f(p) + g(p)$$

Diferenciando resulta:

$$\frac{dx}{dp} = x \frac{f'(p)}{p - f(p)} + \frac{g'(p)}{p - f(p)} \qquad \text{(Lineal)}$$

$$x = h(p, C) \qquad y = x\, f(P) + g(P) \quad \text{Solución paramétrica}$$

L) Ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + g(y')$$

Solución:

$$y = Cx + g(C)$$

Derivando respecto a "C" y eliminando "C" entre las dos ecuaciones, obtenemos la solución singular.

Trayectorias Ortogonales.

Dada una familia de curvas $F(x,y,C) = 0$; llamamos trayectorias ortogonales, a la familia de curvas que corta a la dada bajo un ángulo de 90º

a) Trayectorias en Cartesianas.

A partir de $F(x,y,C) = 0$; calculamos su ecuación diferencial $f(x,y,y') = 0$; cambiamos:

$$y' \text{ por } -\frac{1}{y'}$$

$$f(x,y,(-\frac{1}{y'}))=0$$

que es la ecuación diferencial de la familia ortogonal. Integrando esta ecuación obtenemos la solución del problema:

b) Trayectoria en Polares.

Dada $F(\rho,\theta,C)=0$, derivando obtenemos su ecuación diferencial: $f(\rho,\theta,\rho')=0$, cambiamos:

$$\rho' \text{ por } -\frac{\rho^2}{\rho'}$$

$$f(\rho,\theta,-\frac{\rho^2}{\rho'})=0$$

la integral de esta ecuación es la trayectoria pedida.

EJERCICIOS RESUELTOS.

1.- Hallar la ecuación diferencial de las familias de curvas siguientes:

a) $y = k\,e^{x}$; *b)* $(x-1)^2 + y^2 = k^2$ *c)* $\rho = k(1 + \cos 2\theta)$

Solución:

a) $y = ke^{x}$. Derivando respecto a "x":

$$y' = ke^{x}$$

Igualando los primeros miembros:

$$y' = y \qquad \underline{y' - y = 0}$$

b) $(x - 1)^2 + y^2 = k^2$. Derivando respecto a "x":

$$2(x-1) + 2yy' = 0 \qquad \underline{yy' + (x-1) = 0}$$

c) $\rho = k(1 + \cos 2\theta)$, Derivando respecto a "$\theta$" :

$$\rho' = -2k \text{ sen } 2\theta$$

Despejando k de la ecuación de la familia:

$$k = \frac{\rho}{1 + \cos 2\theta}$$

Sustituyendo en la ecuación de su derivada:

$$\rho' = -2 \text{ sen} 2\theta \frac{\rho}{1 + \cos 2} \quad ; \quad \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{2 \text{ sen} 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

2.- Integrar:

$$x^2(y + 1)dx + y^2(x-1)dy = 0$$

Solución:

Dividiendo por $(y + 1)(x-1)$ la ecuación diferencial se convierte en variables separadas:

$$\frac{x^2}{x - 1}\,dx + \frac{y^2}{y + 1}\,dy = 0$$

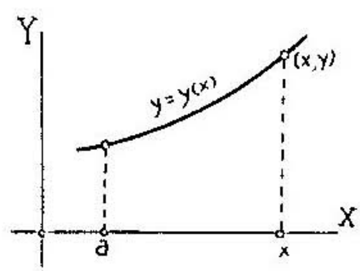
$$(x + 1 + \frac{1}{x - 1})dx + (y - 1 + \frac{1}{y + 1})\, dy = 0$$

Integrando:

$$\frac{x^2}{2} + x + \mathrm{Ln}\,(x - 1) + \frac{y^2}{2} - y + \mathrm{Ln}(y + 1) = k$$

3.- El área limitada por el eje Ox, una abcisa fija $X = a$, y una variable $X = x$, y el arco de curva interceptado por ambas, gira alrededor del eje Ox. Encontrar la curva, si el volumen generado es proporcional a la suma de las coordenadas del extremo variable.

Solución:



El volumen engendrado será:

$$V = \pi \int_a^x y^2 dx$$

Este volumen debe ser proporcional a la suma de las coordenadas del extremo variable.

Igualando:

$$V = k(x + y)$$

Derivando:

$$k(1 + y') = \pi\, y^2$$

Ecuación en variables separadas:

$$y' = \frac{\pi}{k}\,y^2 - 1 \quad ; \qquad \frac{dy}{\frac{\pi}{k}\,y^2 - 1} = dx$$

Integrando:

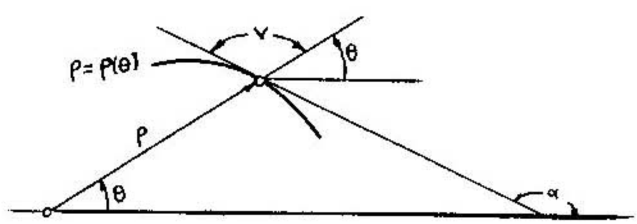
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\pi}}\,Ln\left(y - \sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\pi}}\,Ln\left(y + \sqrt{\frac{k}{\pi}}\right) = x + C$$

ó bien:

$$Ln\,\frac{y - \sqrt{\frac{k}{\pi}}}{y + \sqrt{\frac{k}{\pi}}} = k_1 e^{2\sqrt{\frac{\pi}{k}}\,x}$$

4.- Encontrar las curvas tales que la tangente del ángulo formado en cada punto por la tangente a la curva en dicho punto y el radio vector sea constante e igual a 1.

Solución:



Resolvemos el problema en coordenadas polares.

La ecuación del enunciado será:

$$\text{tg } V = 1 \qquad (1)$$

calcularemos el valor de tg V con referencia a la figura

$$\alpha = V + \theta$$

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\rho\ \operatorname{sen}\theta)}{d(\rho\cos\theta)} = \frac{d\rho\ \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta\, d\theta}{d\rho\ \cos\theta - \rho\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{tg}\rho + \theta}{\frac{d\rho}{d\theta} - \rho\operatorname{tg}\theta} \qquad (2)$$

Dividiendo la igualdad anterior por $d\theta\cos\theta$.

Al mismo tiempo:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(V + \theta) = \frac{\operatorname{tg}V + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}V\operatorname{tg}\alpha} \qquad (3)$$

Identificando (2) y (3):

$$\operatorname{tg}V = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}} = \frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tg}V$$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{\rho}{\rho'} = 1 \qquad \rho = \frac{d\rho}{d\theta}$$

Ecuación en variables separadas:

$$\frac{d\rho}{\rho} = d\theta\ , \quad \rho = k\, e^{\theta}$$

> *5.- Hallar la solución de la ecuación:*
>
> $$x^3\, y' + (2 - 3x^2)\, y - x^3 = 0$$
>
> *tal que* $y(1) = 0$.

Solución:

La ecuación diferencial dada es lineal:

$$y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3}\, y = \frac{x^3}{x^3}$$

$$y = e^{-\int \frac{2 - 3x^2}{x^3} dx}\left(k + \int 1\, e^{\int \frac{2 - 3x^2}{x^3} dx}\, dx\right)$$

$$y = x^3\, e^{x^{-2}}\left(k - \frac{1}{2}\, e^{-x^{-2}}\right) = kx^3\, e^{x^{-2}} - \frac{1}{2}\, x^3$$

Solución general.

Calcularemos "k" con la condición:

$$x = 1 \; ; \; y = 0 \; ; \quad 0 = e\,k - \frac{1}{2} \; ; \quad k = \frac{1}{2e}$$

$$y = \frac{1}{2e}\, e^{x^{-2}} - \frac{1}{2}\, x^3$$

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1-x^2}{x^2}} - x^3 \right)$$

6.- Integrar:

$$(y \; Ln \; y)\, dx + (x - Ln \; y)\, dy = 0$$

Solución:

Si tomamos $x = x(y)$. Despejando $\frac{dx}{dy} = x'$.

$$\frac{dx}{dy} + x\,\frac{1}{y\cdot Ln \; y} - \frac{Ln \; y}{y \; Ln \; y} = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + x\,\frac{1}{y \; Ln \; y} = \frac{1}{y}$$

Como puede verse, ecuación lineal en $x = x(y)$.

Resolviendo:

$$x = e^{-\int \frac{dy}{y \; Ln \; y}} \left(k + \int \frac{1}{y}\, e^{\int \frac{dy}{y \; Ln \; y}}\, dy\right) =$$

$$= e^{-\,Ln(Lny)} \left(k + \int \frac{1}{y}\, Ln \; y \; dy\right)$$

$$x = \frac{1}{Ln \; y}\left(k + \frac{1}{2}(Ln \; y)^2\right)$$

$$x = \frac{k}{Ln \; y} + \frac{1}{2}\, Ln \; y$$

7.- *Integrar:*

$$\left(2x \operatorname{sh}\frac{y}{x} + 3y \operatorname{ch}\frac{y}{x}\right) dx - \left(3x \operatorname{ch}\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

Solución:

Ecuación Homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \operatorname{sh}\frac{y}{x} + 3y \operatorname{ch}\frac{y}{x}}{3x \operatorname{ch}\frac{y}{x}}$$

Haciendo el cambio:

$$y = ux \; ; \qquad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{2 \operatorname{sh} u + 3u \operatorname{ch} u}{3 \operatorname{ch} u}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}$$

Variables separadas.

$$\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} du = \frac{2}{3} \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{sh} u = kx^{2/3}$$

Deshaciendo el cambio:

$$u = \frac{y}{x} = \operatorname{Arg\,sh} kx^{2/3} \qquad y = x \operatorname{Arg\,sh} kx^{2/3}$$

8.- *Integrar:*

$$(x + y)\, dx + (3x + 3y - 4)\, dy = 0$$

Solución:

Ecuación del tipo de las reducibles:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{3x + 3y - 4}$$

Haciendo:

$$x + y = u \quad ; \quad 1 + y' = u'$$

$$u' - 1 = -\frac{u}{3u - 4} \qquad u' = \frac{2u - 4}{3u - 4}$$

Ecuación en variables separadas:

$$\frac{3u - 4}{2u - 4}\, du = dx$$

Integrando:

$$\frac{3}{2} u + \mathrm{Ln}\,(2u - 4) = x + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{3}{2} (x + y) + \mathrm{Ln}\,(2x + 2y - 4) = x + C$$

9.- Resolver:

$$(2x + y - 1)dy - (4x - y + 7)dx = 0$$

Solución:

Reducible a Homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{matrix} 4x - y + 7 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 3 \end{matrix}$$

Hacemos el cambio:

$$\begin{matrix} x = X - 1 \\ y = Y + 3 \end{matrix} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{4X - Y}{2X + Y}$$

Ecuación Homogénea. Hacemos $Y = uX$

$$u'X + u = \frac{4 - u}{2 + u} \quad ; \quad u'X = \frac{4 - 3u - u^2}{2u}$$

Ecuación en variables separadas:

$$X \frac{du}{dX} = \frac{4 - 3u - u^2}{2u}$$

$$\frac{2u}{4 - 3u - u^2}\, du = \frac{dX}{X}$$

Integrando:

$$- \frac{8}{5} \operatorname{Ln}(u + 4) - \frac{2}{5} \operatorname{Ln}(u - 1) = \operatorname{Ln} KX$$

$$(u + 4)^{8/5} (u - 1)^{2/5} X = k$$

Deshaciendo los cambios:

$$u = \frac{Y}{X} = \frac{y - 3}{x + 1}$$

Obtenemos:

$$(y + 4x + 1)^{8/5} (y - x - 4)^{2/5} (x + 1)^{-1} = k$$

10.- Integrar:

$$(4x^3 y^3 - 2xy)dx + (3x^4 y^2 - x^2)\, dy = 0 \qquad (1)$$

Solución:

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial y} (4x^3 y^3 - 2x y) = 12x^3 y^2 - 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (3x^4 y^2 - x^2) = 12x^3 y^2 - 2x$$

Como ambas son iguales, la ecuación es diferencial exacta.

Calculemos la función $u(x,y)$, con la condición $U'x\, dx + U'y\, dy \equiv (1)$

$$U(x,y) = \int (4x^3 y^3 - 2xy)\, dx + \Phi(y) = x^4 y^3 - x^2 y + \Phi(y)$$

Derivando respecto de y, para calcular $\Phi(y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^4y^2 - x^2 + \Phi'(y) = 3x^4\ y^2 - x^2 \qquad \Phi'(y) = 0 \quad \Phi(y) = k$$

La solución será:

$$U(x,y) \equiv x^4\ y^3 - x^2y + k$$

$$U(x,y) = C$$

será la solución de la ecuación diferencial:

$$x^4\ y^3 - x^2y = C$$

11.- Integrar:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xy\ dy = 0$$

hallando previamente un factor integrante que dependa de "x".

Solución:

Sea: $\mu = \mu(x)$ el factor integrante.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)\ (x^2 + y^2 + x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\ xy\right)$$

$$\mu(x)\ 2y = \frac{d\mu}{dx}\ xy + y\ \mu(x)$$

$$\frac{d\mu}{dx}\ xy = \mu(x)(2y - y)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{y}{xy}\ dx \qquad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x} \qquad \mu = x$$

La ecuación:

$$x(x^2 + y^2 + x)dx + x\cdot xy\ dy = 0$$

es ya diferencial exacta.

Calculamos $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx + \Phi(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \Phi(y)$$

Derivando $U(x,y)$, respecto de "y" para calcular $\Phi(y)$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \Phi'(y) = x\ xy\ ;\quad \Phi'(y) = 0 \quad \Phi(y) = k$$

$$U(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k$$

Solución pedida:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2\ y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$$

12.- Hallar un factor integrante de la forma:

$$\mu = \mu(x \cdot y)$$

e integrar con él, la ecuación:

$$y(x^2\ y^2 + 2)dx + x\ (2 - 2x^2\ y^2)dy = 0$$

Solución:

Si $\mu = \mu(x.y)$ es el factor integrante, debe cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x.y)(x^2\ y^2 + 2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x.y)(2x - 2x^3\ y^2)\right) \qquad (1)$$

Haciendo $x.y = t$:

$$\frac{\partial \mu(x.y)}{\partial y} = \frac{d\mu}{dt}\ \frac{\partial t}{\partial y} = x\ \frac{d\mu}{dt}$$

$$\frac{\partial \mu(x.y)}{\partial x} = \frac{d\mu}{dt}\ \frac{\partial t}{\partial x} = y\ \frac{d\mu}{dt}$$

Derivando en (1):

$$x\ \frac{d\mu}{dt}\ (x^2\ y^2 + 2y) + \mu\,(3x^2\ y^2 + 2) = y\ \frac{d\mu}{dt}\ (2x - 2x^3\ y^2) + \mu(2-6x^2y^2)$$

Agrupando términos:

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu\,\frac{-9\ x^2\ y^2}{3x^3\ y^3}\ ;\ \frac{d\mu}{dt} = \mu\,\frac{-3}{t}\ ;\ \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3}{t}\ dt$$

$$\mu = t^{-3} \quad ; \qquad \mu(x.y) = (xy)^{-3}$$

Multiplicando la ecuación dada por $(xy)^{-3}$ la ecuación se convierte en - una diferencial exacta.

$$\frac{x^2 y^3 + 2y}{(xy)^3}\, dx + \frac{2x - 2x^3 y^2}{(xy)^3}\, dy = 0$$

Calculemos $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int \frac{y^3 x^2 + 2y}{x^3 y^3}\, dx + \Phi(y)$$

$$U(x,y) = \text{Ln } x - \frac{1}{x^2 y^2} + \Phi(y)$$

Derivando respecto de "y":

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2}{x^2 y^3} + \Phi'(y) = \frac{2x - 2x^3 y^2}{x^3 y^3}$$

$$\Phi'(y) = -\frac{2}{y} \qquad \Phi(y) = -2 \text{ Ln } y + C$$

$$U(x,y) \equiv \text{Ln } x - \frac{1}{x^2 y^2} - 2 \text{ Ln } y + C$$

Solución:

$$\text{Ln } x - 2\text{Ln } y - \frac{1}{x^2 y^2} = k$$

13.- Integrar:

$$(x^3 - 2x^2 \cos y + \cos y)dx + x \text{sen } y\, dy = 0$$

calculando previamente un factor integrante que dependa de x.

Solución:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)(x^3 - 2x^2 \cos y + \cos y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\, x \text{ sen } y\right)$$

Derivando:

$$\mu(x)(2x^2 \text{ sen } y - \text{sen } y) = \frac{d\mu}{dx} x \text{ sen } y + \mu \text{sen } y$$

Agrupando términos:

$$\frac{d\mu}{dx} x \text{ sen } y = \mu (2x^2 \text{ sen } y - 2 \text{ seny}) \qquad \frac{d\mu}{dx} = \mu \frac{2x^2 \text{ sen } y - 2 \text{ seny}}{x \text{ sen } y}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2x^2 - 2}{x} dx \ ; \qquad \mu(x) = e^{x^2} \frac{1}{x^2}$$

La ecuación:

$$e^{x^2} \frac{1}{x^2} (x^3 - 2x^2 \cos y + \cos y) \, dx + e^{x^2} \frac{1}{x^2} x \text{ sen } y \, dy = 0$$

es diferencial exacta.

Calculemos $U(x,y)$

$$U(x,y) = \int e^{x^2} \frac{1}{x} \text{ sen } y \, dy + \Phi(x)$$

$$U(x,y) = - \frac{e^{x^2}}{x} \cos y + \Phi(x)$$

Derivando respecto a "x" para calcular $\Phi(x)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \cos y - 2 e^{x^2} \cos y + \Phi'(x) = x e^{x^2} - 2e^{x^2} \cos y + \frac{e^{x^2}}{x^2} \cos y$$

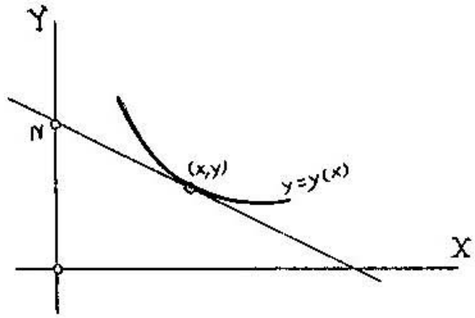
$$\Phi'(x) = x e^{x^2} \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + k$$

$$U(x,y) = - \frac{e^{x^2}}{x} \cos y + \frac{1}{2} e^{x^2} + k$$

$$- \frac{e^{x^2}}{x} \cos y + \frac{1}{2} e^{x^2} = C$$

14.- En cada punto de una curva, la intersección de la tangente con el eje Oy, es proporcional al producto de la abcisa del punto de contacto por el cuadrado de su ordenada.

Solución:



La ecuación de la tangente a la curva solución en un punto genérico (x,y) es:

$$Y - y = y'(X - x)$$

Las coordenadas del punto N, son:

$$X_N = 0 \qquad Y_N = y - y'x$$

La condición que debe cumplir es:

$$Y_N = k.x.y^2$$

Es decir:

$$k.x.y^2 = y - y'x$$

Ecuación de Bernouilli:

$$y'x - y = - kx \cdot y^2$$

Dividiendo por y^2 x:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y}\,\frac{1}{x} = - k$$

Haciendo:

$$\frac{1}{y} = u \quad ; \quad u' = - \frac{y'}{y^2}$$

$$-u' - u\,\frac{1}{x} = - k \quad ; \qquad u' + u\,\frac{1}{x} = k$$

Ecuación lineal.

$$u = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int k\, e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right)$$

$$u = \frac{1}{x} \ (C - k \frac{x^2}{2})$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} (C - k \frac{x^2}{2})$$

Curva Pedida.

> *15.- Integrar:*
>
> $$y' + y \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \ y^2$$

Solución:

Ecuación tipo Bernouilli:

Dividiendo por y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

$$\frac{1}{y} = u \qquad\qquad - \frac{y'}{y^2} = u'$$

$$- u' + u \cos x = - \operatorname{sen} x \cos x$$

$$u' - u \cos x = \operatorname{sen} x \cos x$$

Lineal.

$$u = e^{\int \cos x \, dx} \ (k + \int \operatorname{sen}x \cos x \ e^{- \int \cos x \, dx} \ dx)$$

$$u = e^{\operatorname{sen} x} \ (k + \int \operatorname{sen}x \cos x \ e^{-\operatorname{sen}x} \ dx)$$

Haciendo en la integral:

$$\operatorname{sen} x = t$$

y resolviendo por partes:

$$u = e^{\operatorname{sen} x}(k + (1 + \operatorname{sen}x) \ e^{-\operatorname{sen}x})$$

$$u = k \ e^{\operatorname{sen}x} + 1 + \operatorname{sen} x$$

Deshaciendo el cambio:

$$u = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = k\, e^{\text{sen } x} + 1 + \text{senx}$$

16.- Hallar la curva que cumple la condición:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

y es solución de la ecuación:

$$2 \text{ senx } y' + y \cos x = y^3 (x \cos x - \text{senx})$$

Solución:

Dividiendo la ecuación por $2 \text{ senx } y^3$:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2}\frac{\cos x}{2 \text{ senx}} = \frac{x \cos x - \text{senx}}{2 \text{ senx}}$$

Ecuación Bernouilli.

Haciendo el cambio:

$$\frac{1}{y^2} = u \qquad u' = -\frac{2y'}{y^3}$$

$$-\frac{u'}{2} + u \frac{\cos x}{2 \text{ senx}} = \frac{x \cos x - \text{senx}}{2 \text{ senx}}$$

$$u' - u\frac{\cos x}{\text{senx}} = \frac{\text{senx} - x\cos x}{\text{senx}} \qquad \text{(Lineal)}$$

$$u = e^{\int \frac{\cos x}{\text{senx}} dx}\left(k + \int \frac{\text{senx} - x \cos x}{\text{senx}}\, e^{-\int \frac{\cos x}{\text{senx}} dx} dx\right)$$

$$u = e^{\text{Ln senx}}\left(k + \int \frac{\text{senx} - x\cos x}{\text{senx}}\, e^{-\text{Ln senx}} dx\right) =$$

$$= \text{senx}\left(k + \int \frac{\text{senx} - x \cos x}{\text{sen}^2 x} dx\right)$$

$$u = \text{senx} \left(k + \frac{x}{\text{senx}}\right)$$

Deshaciendo el cambio:

$$u = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2} = \text{senx} \left(k + \frac{x}{\text{senx}}\right) = k \text{ senx} + x = \frac{1}{y^2}$$

Calculemos "k" con las condiciones del problema:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + k \text{ sen } \frac{\pi}{2} \; ; \quad k = \frac{\pi}{2} \; ;$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{\pi}{2} \text{ senx} + x$$

17.- Resolver la ecuación:

$$y' = \frac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^3}$$

sabiendo que admite una solución particular:

$$y_p = - x^2$$

<u>Solución:</u>

La ecuación dada puede escribirse como:

$$y' + \frac{1}{x^3 - 1} y^2 + \frac{x^2}{1 - x^3} y = - \frac{2x}{1 - x^3}$$

Ecuación de Riccati.

Como conocemos una solución particular, hacemos el cambio:

$$y = y_p + z \; ; \quad y = - x^2 + z \quad ; \quad y' = - 2x + z'$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando:

$$z' + 3z \frac{x^2}{1 - x^3} = z^2 \frac{1}{1 - x^3}$$

Ecuación tipo Bernouilli.

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{z} \frac{3x^2}{1 - x^3} = \frac{1}{1 - x^3}$$

$$\frac{1}{z} = u \quad ; \quad u' = -\frac{z'}{z^2}$$

$$u' + \frac{3x^2}{x^3 - 1} u = \frac{1}{x^3-1}$$

$$u = e^{-\int \frac{3x^2}{x^3-1} dx} \left(k + \int \frac{1}{x^3 - 1} e^{\int \frac{3x^2}{x^3-1} dx} dx \right)$$

$$u = \frac{1}{x^3 -1}(k + \int dx) = \frac{k}{x^3-1} + \frac{x}{x^3-1}$$

Deshaciendo los cambios:

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_p} = \frac{1}{y + x^2}$$

$$\frac{1}{y + x^2} = \frac{k}{x^3 - 1} + \frac{x}{x^3 - 1} \quad \text{ó} \quad y = - x^2 + \frac{x^3 - 1}{k + x}$$

18.- Resolver:

$$y = (y')^2 e^{y'}$$

Solución:

Ecuación resuelta en "y". LLamando $y' = p$ y derivando:

$$y = p^2 \cdot e^p$$

$$\frac{dy}{dx} = p = (2p\, e^p + p^2\, e^p) \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2p\ e^p + p^2\ e^p}{p} = 2e^p + pe^p \ ; \qquad dx = (2e^p + pe^p)\ dp$$

Variables separadas.

Solución paramétrica del problema.

$$x + C = e^p(1 + p)$$

$$y = p^2\ e^p$$

19.- Resolver:

$$x = ay' + b(y')^2$$

con a, b, constantes.

Solución:

Ecuación resuelta en "x". Hacemos y' = p , y derivamos respecto a "x":

$$x = ap + bp^2$$

Derivando:

$$1 = a\ \frac{dp}{dx} + b2p\ \frac{dp}{dx} \qquad (1)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\ \frac{dy}{dx} = p\ \frac{dp}{dy}$$

Sustituyendo en (1)

$$1 = (a + 2bp)\ p\ \frac{dp}{dy}$$

Ecuación en variables separadas:

$$dy = (pa + 2b\ p^2)\ dp$$

Solución en paramétricas.

$$y + C = a\ \frac{p^2}{2} + \frac{2b}{3}\ p^3$$

$$x = ap + bp^2$$

20.- Resolver la ecuación diferencial:

$$(y')^4 - (x+2y+1)(y')^3 + (x+2y+2xy)(y')^2 - 2xyy' = 0$$

Solución:

Resolvemos en "y' " ,calculamos sus raices:

$$y' = 0 \; ; \; y' = 1 \; ; \; y' = x \; ; \; y' = 2y$$

La ecuación puede escribirse como:

$$(y' - 0)(y' - 1)(y' - x)(y' - 2y) = 0$$

Lo que implica:

$$y' = 0 \;,\quad y_1 = k \;;\quad y' = 1 \;,\quad y_2 = x + k \;;\quad y' = x \;,\quad y_3 = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y' = 2y \;,\quad \frac{dy}{y} = 2dx \;,\quad y_4 = k\, e^{2x}$$

21.- Resolver:

$$y = 2x\, y' + (y')^4$$

Solución:

Es una ecuación de tipo Lagrange.

Haciendo $y' = p$, y derivando resulta una lineal en $x = f(p)$

$$y = 2xp + p^4 \;;\quad p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + 4\, p^3 \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp}(-p) = 2x + 4\, p^3 \;;\quad \frac{dx}{dp} + x\frac{2}{p} = -4\, p^2 \quad \text{(Lineal)}$$

$$x = e^{-\int \frac{2\,dp}{p}} \left(k - 4 \int p^2\, e^{\int \frac{2\,dp}{p}} dp\right) =$$

$$= \frac{1}{p^2}\left(k - \frac{4}{5}\, p^5\right)$$

Solución en paramétricas.

$$x = \frac{1}{p^2}\left(k - \frac{4}{5}p^5\right)$$

$$y = 2xp + p^4$$

22.- Hallar la solución de:

$$y = xy' + \sqrt{4 + (y')^2}$$

Solución:

Ecuación del tipo Clairaut:

Solución general:

$$y = xC + \sqrt{4 + C^2} \qquad (1)$$

Derivando respecto a "C"

$$0 = x + \frac{C}{\sqrt{4 + C^2}}$$

$$x^2 = \frac{C^2}{4 + C^2} \qquad C^2(1 - x^2) = 4x^2$$

$$C = \pm \frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Sustituyendo en (1):

$$y = \pm \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{4 + \frac{4x^2}{1 - x^2}} = \pm \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2 \pm 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tomando la determinación positiva:

$$y = \frac{2 + 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tomando la determinación negativa:

$$y = \frac{2(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Estas dos soluciones son soluciones singulares de la ecuación propuesta.

23.- Dada la familia de curvas :

$$y^2\,(k - x) = x^3$$

hallar su familia ortogonal.

Solución:

Encontramos primeramente la ecuación diferencial de la familia conocida:

$$y^2(k - x) = x^3$$

Derivando respecto a "x":

$$2yy'(k - x) - y^2 = 3x^2$$

Eliminando "k" entre estas dos ecuaciones:

$$2yy'\,\frac{x^3}{y^2} - y^2 = 3x^2$$

Ecuación diferencial de la familia propuesta:

$$2y'\,x^3 = y(3x^2 + y^2)$$

Sustituimos y' por $-\frac{1}{y'}$:

$$-\frac{2\,x^3}{y'} = y(3x^2 + y^2)$$

Ecuación diferencial de la familia ortogonal:

$$y' = -\frac{2x^3}{3x^2y + y^3}$$

Ecuación homogénea:

$$y = ux \;;\quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = -\frac{2}{3u + u^3} \;;\qquad x\,\frac{du}{dx} = \frac{-2 - 3u^2 - u^4}{u^3 + 3u}$$

$$\frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2}\, du = -\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{2}\, Ln\,(u^2 + 2) + Ln(u^2 - 1) = -Lnx + Ln\,C$$

$$\frac{u^2 + 1}{\sqrt{u^2 + 2}} = \frac{C}{x}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{(\frac{y}{x})^2 + 1}{\sqrt{(\frac{y}{x})^2 + 2}} = \frac{C}{x}$$

Familia ortogonal solución:

$$\frac{y^2 + x^2}{(y^2 + 2x^2)^{1/2}} = C$$

24.- Hallar las trayectorias ortogonales a:

$$y^2 + x^2 - kx = 0$$

<u>1º método de solución:</u>

Siguiendo el método del ejercicio 23.

$$y^2 + x^2 - kx = 0\ ; \qquad 2yy' + 2x - k = 0$$

$$2yy' + 2x - \frac{y^2 + x^2}{x} = 0 \quad ; \qquad y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$$

$$-\frac{2y}{y'} + 2x - \frac{y^2 + x^2}{x} = 0\ ; \quad -2yx + 2x^2\, y' - y'(y^2 + x^2) = 0$$

$$y' = \frac{2yx}{x^2 - y^2}$$

Ecuación homogénea:

$$y = ux \quad ; \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{2u}{1 - u^2} \; ; \quad \frac{du}{dx}\, x = \frac{u + u^3}{1 - u^2} \; ; \quad du\, \frac{1 - u^2}{u + u^3} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\text{Ln } u - \text{Ln}(u^2 + 1) = \text{Ln } Cx.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\frac{u}{u^2 + 1} = Cx \; .$$

Ecuación de la familia ortogonal.

$$\frac{y}{y^2 + x^2} = C \qquad y^2 + x^2 - ky = 0$$

2º método de solución:

Pasando a polares:

$$\rho^2 - k\rho \cos\theta = 0; \; \rho = k \cos\theta$$

Derivando y eliminando "k":

$$\rho' = - k \text{ sen } \theta \; ; \qquad \frac{\rho'}{\rho} = - \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

Cambiamos: $\rho' \to - \dfrac{\rho^2}{\rho'}$

$$- \frac{\rho^2}{\rho'} \frac{1}{\rho} = - \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \quad ; \quad \frac{d\rho}{d\theta} \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \rho$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = d\rho \; \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Integrando:

Ecuación de la familia ortogonal:

$$\rho = k \text{ sen } \theta$$

25.- Hallar las trayectorias ortogonales a la familia:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

Solución:

Pasando a coordenadas polares:

$$\rho = k\,(1 + \cos\theta\,).$$

Familia de cardioides de eje el eje polar.

Derivando y eliminando k:

$$\rho' = -\,k\ \text{sen}\ \theta\ ; \qquad \frac{\rho'}{\rho} = -\,\frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \cos\theta}$$

Cambiando ρ' ; $-\dfrac{\rho^2}{\rho'}$

$$-\,\frac{\rho^2}{\rho'}\,\frac{1}{\rho} = -\,\frac{\text{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta}\ ;\ \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\text{sen}\ \theta}{1 + \cos\theta}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1 + \cos\theta}{\text{sen}\ \theta}\,d\theta$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{2\ \text{sen}\ \dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}\,d\theta = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\text{sen}\ \dfrac{\theta}{2}}\,d\theta$$

Integrando:

$$\rho = k\,\left(\text{sen}\ \frac{\theta}{2}\right)^2 = k\,\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta\,)$$

Familia ortogonal formada por cardioides simétricas respecto a:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

de la familia primitiva.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

26.- Resolver:

$$3\,e^{x}\,tg\;y\;dx + (2-e^{x})\sec^{2}y\;dy = 0$$

Solución:

Variables separadas $\qquad (2 - e^{x})^{-1/3}\;tg\;y = k$

27.- Calcular la solución particular de la ecuación:

$$(1 + e^{x})\;y\;y' = e^{x}$$

que satisface la condición inicial $y(0) = 1$.

Solución:

Variables separadas. $\qquad$ Solución general: $\dfrac{y^2}{2} = Ln(1 + e^{x}) + k$

Solución particular: : $\dfrac{y^2}{2} = Ln(1 + e^{x}) + \dfrac{1}{2}$

28.- Resolver:

$$y' = \frac{1}{x\cos y + \operatorname{sen}2y}$$

Solución:

Tomando $x = x(y)$, la ecuación es lineal,

$$x = k\,e^{\operatorname{sen}y} - 2\operatorname{sen}y - 2$$

29.- Hallar la curva, $y = f(x)$, para la cual el volumen engendrado, al girar alrededor del eje OX, la región limitada por ella misma, el eje OX y las rectas: $X = 0$ y $X = x$, es igual a la semidiferencia de los cuadrados de la ordenada y la abscisa del punto genérico de la curva : $(x, f(x))$.

Solución:

$$\pi \int_0^x y^2 \, dx = \frac{y^2 - x^2}{2} \quad \text{Lineal en } y^2 = u$$

$$y^2 = \frac{1}{2\pi^2} (e^{2\pi x} - 1) - \frac{x}{\pi}$$

30.- Resolver:

$$(x^2 + y^2)dx - 2xy \, dy = 0$$

Solución:

Homogénea $\qquad x^2 - y^2 = kx$

31.- Resolver:

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

Solución:

Reducible a homogénea: $\qquad x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = k$

32.- Resolver:

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1) \, dy = 0$$

Solución:

Reducible a variable separadas: $\qquad x + 2y + 3 \, Ln(x + y - 2) = k$

33.- Integrar:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$$

Solución:

Diferencial exacta: $\qquad \frac{2}{3} x^3 + 3xy + \frac{y^2}{2} - y = k$

34.- Integrar:

$$2xy \, Lny \, dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})dy = 0$$

encontrando un factor integrante que dependa solo de "y".

Solución:

$$\mu(y) = \frac{1}{y}$$

$$x^2 \operatorname{Lny} + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{3/2} = k$$

35.- Integrar:

$$(y + xy^2)dx + (x - x^2y)dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x.y)$

Solución:

$$\mu = \frac{1}{(x.y)^2}$$

$$- \frac{1}{xy} + \operatorname{Ln} \frac{x}{y} = k$$

36.- Integrar:

$$(6xy^2 + 7x^2 - y)dx + (2yx^2 - 5y^2 - 3x)dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante que depende de $x^2 - y$.

Solución:

$$\mu(x^2 - y) = (x^2 - y)^2$$

$$x^7 + x^6y^2 - 3x^5y - 3x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y^4 - xy^3 = k$$

37.- Integrar:

$$(x^4 + xy^3 + x^2)dx + y^2\,dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante función de $(x^3 + y^3)$.

Solución:

$$\mu(x^3 + y^3) = \frac{1}{x^3 + y^3}$$

$$e^{x^2/2}\,(x^3 + y^3)^{1/3} = k$$

38.- Integrar:

$$(x^2 y + \frac{1}{y})dx + x^3 dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu(x.y)$

Solución:

$$\mu(x.y) = x\ y\ e^{x^2 y^2}$$

$$x^2\ e^{x^2 \cdot y^2} = k$$

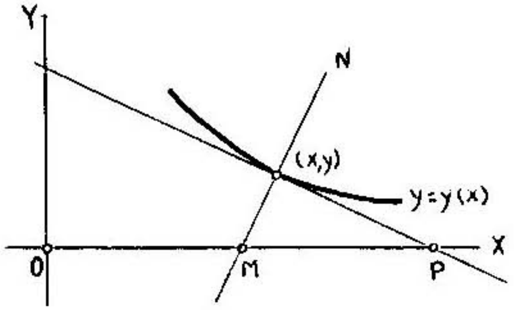
39.- Integrar:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2\ y^5$$

Solución:

Tipo Bernouilli: $\frac{1}{y^4} = \frac{k}{x^4} - \frac{4}{7}\ x^3$

40.- Hallar las curvas cuya normal en cada punto corta al eje Ox, en el punto medio del segmento limitado por el origen y el corte de la tangente a la curva con el Ox.



Solución:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OP}}{2}$$

Ecuación de Lagrange:

$$x = k\sqrt{\frac{1 + 2\ p^2}{1 + p^2}} \qquad y = \frac{-\ p}{\sqrt{1 + 2p^2}\ \sqrt{1 + p^2}}$$

41.- Hallar las curvas tales que el área del triángulo formado por la tangente a un punto de dicha curva, y los semiejes Ox,Oy, es constante e igual a k.

Solución:

Clairaut: $y = Cx \pm \sqrt{2kC}$; $y = -\dfrac{k}{2x}$; $y = \dfrac{3k}{2x}$

Soluciones singulares las dos últimas.

42.- Los puntos medios de los segmentos de tangente a una curva comprendidos entre el punto de contacto y el eje Ox, describen la parábola $y^2 = 2x$. Hallar la curva sabiendo que pasa por el punto (1,2).

Solución:

$$\frac{y^2}{4} = 2\left(x - \frac{y}{2y'}\right)$$

Lineal en $x = x(y)$:

$$x = \frac{3}{y^2} + \frac{y^2}{16}$$

43.- Hallar una curva que posea la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abcisa en el punto de contacto.

Solución:

Homogénea: $x^2 + y^2 - kx = 0$

44.- Hallar las trayectorias ortogonales a la familia:

$$(x^2 + y^2)^2 = k^2 \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Solución:

En coordenadas Polares: $\rho = k \operatorname{sen} 2\theta$

45.- Hallar las trayectorias ortogonales a la familia:

$$ax^2 + by^2 = k$$

con a,b constantes.

Solución:

$$y^a = kx^b$$

46.- Hallar las trayectorias ortogonales a la familia:

$$x^2 = C + y$$

Solución:

$$x = k\ e^{-2y}$$

47.- Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas:

$$\left(f(x,y)\right)^2 + x^2 + 2ky - 2 = 0$$

siendo f(x,y) , la solución singular f(x,y) = 0, de la ecuación diferencial:

$$8y'(xy' - y + 1) + y - 1 = 0$$

Determinar la trayectoria que pasa por (1,0).

Solución:

La ecuación es de Lagrange. Solución singular:

$$y - 1 = 0 \qquad f(x,y) \equiv y - 1$$

La familia ortogonal es:

$$y^2x + x - \frac{x^3}{3} = k$$

La trayectoria que pasa por (1,0) es:

$$y^2x + x - \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}$$

48.- Trayectoria ortogonales a la familia de curvas que verifican en cada punto: la distancia de dicho punto al origen de coordenadas elevada a la sexta es proporcional a dos veces el producto de la abcisa por la ordenada en ese punto.

Solución:

Ecuación de la familia:

$$(x^2 + y^2)^3 = 2\,kxy$$

Diferencial exacta.

$$\frac{y^4}{4} - \frac{5\,x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} = k$$

Trayectoria ortogonal.

49.- Se considera la familia, cuyos puntos verifican que $d_1 d_2 = C$, siendo d_1, d_2, las distancias a los puntos $(-1,0)$, $(1,0)$. Hallar su trayectoria ortogonales.

Solución:

Familia dada: $\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}\ \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = C$

La ecuación diferencial de la familia ortogonal:

$$dy(x^3 - x + xy^2) - dx(x^2y + y + y^3) = 0$$

Admite un factor integrante:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2\,y^2}$$

Integrando:

$$y^2 - x^2 + 1 = kxy$$

INDICE:

Página: